# 4. soutěžní série – řešení

**1.** Nechť $f$ je lineární zobrazení $\mathrm{M}_n(k) \to \mathrm{M}_n(k)$ komutující s transpozicí a $E_{ij}$ matice s jedničkou na pozici $(i,j)$ a jinde nulami – tyto matice (pro všechna $1 \leq i,j \leq n$) zjevně tvoří bázi $\mathrm{M}_n(k)$. Jelikož $E_{ii} = E_{ii}^{\mathrm{T}}$, musí být $f(E_{ii})$ symetrická matice. Pro $i \neq j$ pak je $f(E_{ij}) = f(E_{ji})^{\mathrm{T}}$. Snadno nahlédneme, že tyto podmínky naopak implikují $f(A^{\mathrm{T}}) = f(A)^{\mathrm{T}}$ pro všechny $A \in \mathrm{M}_n(k)$. Pro každý z $n$ diagonálních prvků tedy máme na výběr z $n(n+1)/2$-dimenzionálního prostoru symetrických matic, pro $n(n-1)/2$ prvků nad diagonálou naopak můžeme zvolit všech $n^2$ souřadnic. Hledaná celková dimenze prostoru zobrazení tedy je

$$n\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}n^2 = \frac{n^4+n^2}{2}.$$

**2.** Ne. Volbou $a=1$, $b=2$ vidíme, že $12 \mid \overline{1n2}$. Dále volbou $a=2$, $b=4$ máme $24 \mid \overline{2n4}$, speciálně tedy také $12 \mid \overline{2n4}$, a tedy

$$12 \mid 1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{\text{dlouhé}\\ \text{jako } n}}2.$$

To je ovšem spor, jelikož číslo vpravo dává zbytek 2 po dělení čtyřmi.

**3.** Pro každé $x$ platí $f(x+1)-f(x) = f'(x) = \frac{1}{2}(f(x+2)-f(x))$, takže $f(x+2)-f(x+1) = f(x+1)-f(x)$, a tedy $f'(x) = f'(x+1)$. Z toho plyne, že $f'$ je 1-periodická. Zároveň platí, že pravá strana rovnosti $f'(x) = f(x+1)-f(x)$ je diferencovatelná, tedy i levá strana je diferencovatelná a $f''(x) = f'(x+1) - f'(x) = 0$. Dvakrát zintegrujeme a dostáváme, že $f(x) = ax+b$. Na druhou stranu, každá lineární funkce zadání vyhovuje.

**4.** Označme počet hledaných permutací $N(n)$. Permutace $p^2$ sestává z $\frac{1}{2}n(n-1)$ transpozic a je sudá, tedy $N(n) = 0$ pro $n \equiv 2$ nebo $3 \pmod 4$.

Pro $n = 4m$ permutace $p^2$ nemá pevný bod, tedy ani $p$ nemá pevný bod. Nechť $p(i) = k$ pro nějaká $i,k \in \{1,\ldots,n\}$. Pak $p(p(i)) = p(k) = 4m+1-i$. Zároveň $p(p(k)) = p(4m+1-i) = 4m+1-k$ a $p(p(4m+1-i)) = p(4m+1-k) = i$, tj. $(i, k, 4m+1-i, 4m+1-k)$ tvoří 4-cyklus (tato 4 čísla jsou různá, kdyby $i=k$, měli bychom pevný bod, kdyby $i = 4m+1-i$, nebylo by $i$ celé číslo). Odstraníme-li nyní tato 4 čísla, počet permutací na zbývajících číslech je přesně $N(4m-4)$. Vybereme-li tedy čtveřici obsahující jedničku (to můžeme udělat $4m-2$ způsoby, když $i=1$, pak $p(i) = k \in \{2,3,\ldots,4m-1\}$), dostáváme rekurenci $N(4m) = (4m-2)N(4m-4)$. Navíc $N(4) = 2$, takže $N(4m) = (4m-2)(4m-6)\ldots 2 = 2^m 1\cdot 3 \cdot (2m-1) = \frac{(2m)!}{m!}$.

Pro $n = 4m+1$ dostáváme podobně jako výše, že $p(i) = k$ implikuje $p(k) = 4m+2-i$, $p(4m+2-i) = 4m+2-k$, $p(4m+2-k) = i$. Nyní se však může stát, že $k = i$, ovšem jen pokud $i = 2m+1$. Navíc platí, že $i = 4m+2-i$, právě když $i = 2m+1$. Tedy $i = 2m+1$ je v 2-cyklu nebo 1-cyklu. Pokud $i \neq 2m+1$ a $k \neq 2m+1$, pak jsou $i$, $k$, $4m+2-i$, $4m+2-k$ čtyři různá čísla. Tedy po odstranění cyklu obsahujícím $2m+1$ se nám zbytek rozpadne na disjunktní 4-cykly. Vzhledem k tomu, že $n = 4m+1$, musí $2m+1$ být v 1-cyklu, tj. je to pevný bod. Pak ale máme $N(4m+1) = N(4m) = \frac{(2m)!}{m!}$.