4. soutěžní série

21. 11. 2016

Úloha 1. Nechť $\mathrm{M}_n(k)$ značí vektorový prostor všech $n \times n$ matic nad tělesem k. Nalezněte dimenzi vektorového prostoru všech lineárních zobrazení $f\colon \mathrm{M}_n(k) \to \mathrm{M}_n(k)$ takových, že $f(A^{\mathrm{T}}) = f(A)^{\mathrm{T}}$ pro všechny $A \in \mathrm{M}_n(k)$. (5 bodů)

Úloha 2. Existuje přirozené číslo n takové, že pro každé dvě nenulové číslice a, b platí $\overline{ab} \mid \overline{anb}$? (10 bodů)

Úloha 3. Najděte všechny diferencovatelné funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují

$$f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}$$

pro všechna reálná x a přirozená n. (10 bodů)

Úloha 4. Dáno n přirozené. Určete počet permutací p na množině $\{1, \ldots, n\}$, pro něž

$$p^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

(15 bodů)