5. soutěžní série – řešení

1. Odpověď je 12. Dosáhnout tohoto počtu můžeme např. tak, že do čtverců seskupíme počty bonbónů $(1, 2, 47, 48)$, $(3, 4, 45, 46)$, $\ldots$, $(23, 24, 25, 26)$. Na druhou stranu, kdybychom mohli umístit 13 čtverců, musely by tyto pokrýt aspoň $4 \cdot 13$ různých počtů bonbónů, tedy celkem aspoň

$$1 + 2 + \cdots + 4 \cdot 13 = 1378$$

bonbónů. Protože ovšem $1378 > 13 \cdot 99$, nějaký čtverec by musel zakrývat aspoň 100 bonbónů – spor.

2. Odečtěme od k-tého řádku $(k-1)$-ní řádek, postupně pro $k = n, n-1, \ldots, 2$. Získáme horní trojúhelníkovou matici s diagonálou $2, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^{n-1}$. Tedy

$$\det A_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}.$$

Největší n, pro něž $\frac{n(n-1)}{2} \le 2016$, tj. $n^2 - n \le 4032$ je $n = 2^6 = 64$, pro které dokonce nastává rovnost (neboť $2^{12} = 4096$).

3. Dokazujme sporem. Je-li množina ze zadání nespočetná, pak je jedna z množin $M_- = \{x : f'_-(x) < f'_+(x)\}$, $M_+ = \{x : f'_-(x) > f'_+(x)\}$ nespočetná. BÚNO nechť je to M_-. Pro racionální čísla p, q, $p < q$ označme $M_{p,q}$ množinu všech bodů x, pro něž $f'_-(x) < p < q < f'_+(x)$. Protože dvojic racionálních čísel je spočetně, musí být některá z množin $M_{p,q}$ nespočetná. Zafixujme taková p, q. Pro každý bod $x \in M_{p,q}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $h \in (0, \frac{1}{n})$ je

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > q > p > \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}, \tag{*}$$

označme tedy $n(x)$ nejmenší takové n a dále označme $M_{p,q,n}$ množinu všech $x \in M_{p,q}$, pro něž $n(x) = n$. Jistě některá z množin $M_{p,q,n}$ je nespočetná, zafixujme si ji a dojděme konečně ke sporu. Množina $M_{p,q,n}$ jistě obsahuje dva body, které mají vzdálenost menší než $1/n$, označme je x a y, $x < y$. Dle (*) musí platit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > q > p > \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

což je kýžený spor.

4. Dokážeme, že hledaným supremem je $1/2$ a toto se nabývá.

Mikulášská funkce se zlobivostí $1/2$ je např.

$$f(n) = \begin{cases} (n+1)/2 & \text{pokud je } n+1 \text{ mocnina dvojky,} \\ n+1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nechť f je dále mikulášská funkce se zlobivostí $z \ge 1/2$, ukážeme, že $z = 1/2$. Jelikož je f mikulášská, je to bijekce, kterou navíc můžeme rozložit na cykly (stejným způsobem jako permutaci na konečné množině). Mikulášskost navíc říká, že délka každého cyklu je shora omezena nejmenším číslem v tomto cyklu. Na druhou stranu, je-li n číslo v nějakém cyklu, pak $n, f(n), \ldots, f^{\lfloor zn \rfloor}(n)$ jsou různá čísla, takže délka cyklu je alespoň $\lfloor zn \rfloor + 1$ – v žádném cyklu se tedy nemohou současně nacházet n a $2n$ (nebo vyšší).

Označme C_m cyklus obsahující 2^m, indukcí dokážeme, že C_m je $2^m, 2^m+1, \ldots, 2^{m+1}-1$ v nějakém pořadí. Pro $m = 0$ je to jasné. Předpokládejme, že máme dokázáno pro $0, \ldots, m-1$, pak všechna čísla v C_m jsou alespoň 2^m, jelikož všechna menší čísla už jsou v nějakém jiném cyklu. Z úvahy výše navíc plyne, že čísla jsou shora omezena $2^{m+1} - 1$. Nechť d je délka C_m, pak nejvyšší číslo v C_m je alespoň $2^m + d - 1$, díky čemuž je v C_m alespoň $\lfloor z(2^m + d - 1) \rfloor + 1$ různých čísel. Jinak řečeno,

$$d \ge \lfloor z(2^m + d - 1) \rfloor + 1 \ge 2^{m-1} + d/2,$$

tedy $d \ge 2^m$, neboli $d = 2^m$. Tím je důkaz hotov.

Zbývá určit zlobivost: 2^m je nejmenší t takové, že $f^t(n) = n$ pro všechna $n \in C_m$, speciálně pro $n = 2^{m+1} - 1$. Máme tedy

$$2^m - 1 \ge \lfloor z(2^{m+1} - 1) \rfloor \ge z(2^{m+1} - 1) - 1, \quad \text{odkud} \quad z \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2^{m+1} - 1)}.$$

Druhý zlomek jde k nule s rostoucím m, je tedy $z = 1/2$.