5. soutěžní série

5. 12. 2016

Úloha 1. Na každé z 64 polí šachovnice 8×8 umístíme nějaký počet bonbónů z rozsahu $1, \ldots, 64$, na každé pole jiný počet. Následně některá pole zakryjeme nepřekrývajícími se 2×2 čtverci tak, že každý čtverec zakrývá (na svých čtyřech polích) méně jak 100 bonbónů dohromady. Kolik nejvýše čtverců můžeme takto umístit? (5 bodů)

Úloha 2. Buď $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matice se souřadnicemi $a_{ij} = 2^{\min\{i,j\}}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Určete největší n, pro něž $\det A_n \leq 2^{2017}$. (5 bodů)

Úloha 3. (seriál) Buď $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ libovolná. Ukažte, že množina všech bodů, v nichž existují obě jednostranné derivace funkce f a jsou různé, je nejvýše spočetná. (10 bodů)

Úloha 4. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je *mikulášská*, pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje kladné $k \leq n$ splňující $f^k(n) = n$. Řekneme, že f má *zlobivost* $z \in \mathbb{R}$, pokud $n \notin \{f^i(n) \mid 1 \leq i \leq \lfloor zn \rfloor\}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Určete, kolik je

$$\sup\{z \in \mathbb{R} \mid \text{existuje } f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mikulášská se zlobivostí } z\}.$$

Nabývá se toto supremum pro nějakou f?

Poznámka: $f^k \overset{\text{def}}{=} \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k\times}$. (15 bodů)

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`