1. soutěžní série – řešení

1. Ne. Nechť π je nějaká permutace na $\mathbb{N}$. Jelikož existuje $a \in \mathbb{R}$, že $a_i \to a$, je pro každé $\varepsilon > 0$ množina $M_\varepsilon := \{i \in \mathbb{N} : |a - a_i| \geq \varepsilon\}$ konečná. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Označme $n_0 := \max\{i \in \mathbb{N} : \ \pi(i) \in M_\varepsilon\}$. Pak pro každé $n > n_0$ je $|a - a_{\pi(n)}| < \varepsilon$ a jsme hotovi.

2. Ukážeme, že hráči A a B mohou zařídit prohru hráče C tak, že A bude hrát do první misky až do stavu, kdy v ní bude 2016 kuliček, a poté bude hrát do druhé misky a B bude hrát do třetí misky až do 2016 kuliček a poté také do druhé misky. Jednou dosáhne první nebo třetí miska 2016 kuliček, BÚNO dříve ta první. Protože v každém kole přibyly do první misky nejvýše 2 kuličky, máme za sebou aspoň 1008 kol. V tomto okamžiku je tedy v třetí misce aspoň 1008 kuliček a druhá miska je prázdná. Nyní začne A hrát do druhé misky, B hraje nadále do třetí a C musí hrát do třetí, a to do doby, než se třetí miska doplní na 2016 kuliček. To nastane po nejvýše 504 kolech, tj. ve druhé misce je tou dobou nejvýše 504 kuliček. Nyní, ať hrají hráči v jakémkoli pořadí, A a B mohou hrát do druhé misky a C prohraje.

3. Pro všechna z splňující $|z| = 1$ je $|\overline{z}| = |\frac{1}{z}| = 1$, a platí tedy $p(z) = \overline{p(z)} = \overline{p}(\overline{z}) = \overline{p}(\frac{1}{z})$ (druhá rovnost plyne z toho, že komplexní sdružení komutuje se sčítáním i násobením). Tedy

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \cdots + a_0 = \overline{a_n} z^{-n} + \overline{a_{n-1}} z^{1-n} \cdots + \overline{a_0}.$$

Polynom $a_n z^{2n} + a_{n-1} z^{2n-1} + \cdots + z^n(a_0 - \overline{a_0}) - \overline{a_1} z^{n-1} - \ldots - \overline{a_n}$ má pak nekonečně mnoho kořenů (celou jednotkovou kružnici), a tedy má nulové všechny koeficienty. Z toho plyne nulovost všech a_i pro $1 \leq i \leq n$ (a $a_0 \in \mathbb{R}$), čili p musí být konstantní polynom.

4. Díky podmínce $abc = 1$ lze vyjádřit čísla a, b, c ve tvaru $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ pro nějaká kladná x, y, z určená jednoznačně až na násobek kladnou konstantou. Po vynásobení dokazované nerovnosti členem xyz získáme ekvivalentní homogenní nerovnost

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leq xyz.$$

Pokud je některý činitel na levé straně záporný, pak jedno z čísel x, y, z je větší než součet ostatních dvou, tedy zbylé dva činitele na levé straně jsou kladné, levá strana je záporná a nerovnost platí. Jestli jsou všechny činitele na levé straně nezáporné, dokazovaná nerovnost je součinem AG nerovnosti $\sqrt{(x - y + z)(y - z + x)} \leq x$ a jejích dvou cyklických variant.