1. soutěžní série

11. 10. 2017

Úloha 1. Existuje konvergentní posloupnost reálných čísel $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, jejíž členy lze přeuspořádat tak, aby už nebyla konvergentní? Přeuspořádáním myslíme vytvoření posloupnosti $b_i = a_{\pi(i)}$, kde $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je nějaká bijekce. (5 bodů)

Úloha 2. Tři hráči A, B, C se pravidelně střídají v tazích. Tah spočívá ve vložení jedné kuličky do jedné ze tří misek (na začátku hry prázdných), přičemž hráč A si může v každém tahu vybrat mezi první a druhou miskou, hráč B mezi druhou a třetí miskou a hráč C mezi první a třetí miskou. Prohrává ten, po jehož tahu bude v některé misce 2017 kuliček. Ukažte, že libovolní dva hráči se mohou domluvit a zařídit prohru třetího. (10 bodů)

Úloha 3. Buď p polynom s komplexními koeficienty, který nabývá reálných hodnot pro všechna komplexní z, pro něž $|z| = 1$. Ukažte, že p je konstantní. (10 bodů)

Úloha 4. Nechť a, b, c jsou kladná čísla splňující $abc = 1$. Dokažte

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

(10 bodů)