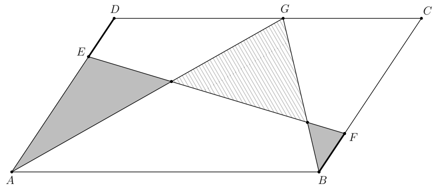
2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 1. 11. 2017.

Úloha 1. Je dán rovnoběžník $ABCD$, libovolný bod G na jeho straně CD, bod E na straně AD a bod F na straně BC tak, že $|DE| = |BF|$. Úsečky AG, BG a EF spolu se stranami rovnoběžníku ohraničují tři trojúhelníky (vyznačené na obrázku). Dokažte, že součet obsahů šedých trojúhelníků je roven obsahu šrafovaného trojúhelníku.



Úloha 2. Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má limitu v každém bodě. Dokažte, že množina bodů nespojitosti funkce f nejvýše spočetná.

Úloha 3. Najděte nejmenší přirozené číslo a, pro něž existuje polynom s celočíselnými koeficienty ax^2+bx+c, který má dva různé kořeny uvnitř intervalu $(0, 1)$.

Úloha 4. Pro přirozené číslo k definujme $p(k)$ jako nejmenší prvočíslo, které nedělí k. Pokud $p(k) > 2$, definujme $q(k)$ jako součin všech prvočísel menších než $p(k)$, jinak $q(k) = 1$. Uvažujme posloupnost

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Najděte všechna přirozená n, pro která je $x_n = 217$.

Úloha 5. Pro konečné p^2 prvkové těleso $\mathcal{F}$, kde p je liché prvočíslo, uvažujme množinu $\frac{p^2-1}{2}$ nenulových prvků S takovou, že pro každé nenulové $a \in \mathcal{F}$ je právě jeden z prvků a, $-a$ v S. Ukažte, že počet prvků $S \cap \{2a : a \in S\}$ je sudý.

⋆ **Úloha 6.** V rovině postává 24 robotů. Každý z nich má zorný úhel o velikosti 70°. Kolik nejvýše mezi nimi může být uspořádaných dvojic robotů (R_1, R_2) takových, že robot R_1 vidí robota R_2? Žádný robot nevidí sám sebe.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`