2. soutěžní série – řešení

1. Protože $\int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} = 0$, je polynom p buď nulový nebo je na množině kladné míry uvnitř $(0,1)$ kladný a na množině kladné míry uvnitř $(0,1)$ záporný. Z Bolzanovy věty o střední hodnotě použité na spojitou funkci p potom plyne, že p má kořen uvnitř intervalu $(0,1)$.

2. Označme velké intervaly $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, 2m-1$ a seřaďme je tak, že $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{2m-1}$. Buď $k = \min\{b_k : k = m, \ldots, 2m-1\}$. Interval I_k obsahuje dva disjunktní malé intervaly $J_1 = [c_1, d_1]$, $J_2 = [c_2, d_2]$, BÚNO $a_k \le c_1 \le d_1 < c_2 \le d_2 \le b_k$. Ukážeme, že jeden z intervalů J_1, J_2 leží v m velkých intervalech.

Pokud $d_1 \le b_j$ pro všechna $j = 1, \ldots, m$, pak evidentně $J_1 \subset I_j$ pro $j = 1, \ldots, m$ a jsme hotovi. Nechť tedy naopak $d_1 > b_s$ pro nějaké $s \in \{1, \ldots, m\}$. Pak také $c_2 > b_s$ a protože intervaly I_j, $j \ge m$ mají neprázdné průniky s I_s, máme $a_j \le b_s$ pro všechna $j \ge m$. Tedy pro všechna $j \ge m$ platí $a_j \le b_s < c_2 < d_2 \le b_k \le b_j$, tj. $J_2 \subset I_j$ pro $j = m, \ldots, 2m-1$ a důkaz je hotov.

3. Každé číslo $n \in \mathbb{N}_0$ lze zapsat ve čtyřkové soustavě jako $n = \sum_{i=0}^{k_n} 4^i c_i$, kde každá číslice c_i je nějakým z čísel $0, 1, 2, 3$. Do množiny X vložíme právě ta čísla, která ve čtyřkové soustavě mají pouze číslice 0 a 1. Dané číslo $n \in \mathbb{N}_0$ je součtem $a + 2b$ čísel $a, b \in X$ určených následovně: pokud je v n i-tou číslicí c_i, pak i-té číslice a, b budou a_i, b_i určené jako $0 \mapsto (0,0)$, $1 \mapsto (1,0)$, $2 \mapsto (0,1)$, $3 \mapsto (1,1)$. Číslice na i-tém místě v číslech a, b se mohou nasčítat pouze na $0, 1, 2, 3$ a proto i-tá číslice n je určená pouze těmito dvěma číslicemi. Zároveň každé z čísel $0, 1, 2, 3$ má jednoznačné vyjádření. Odtud plyne, že žádné $n \in \mathbb{N}_0$ nemá jiné vyjádření kromě výše sestrojeného.

4. Podle předpokladů v zadání platí $AD^T - BC^T = I_n$, $-AB^T + BA^T = O_n$, $CD^T - DC^T = O_n$, $-CB^T + DA^T = I_n$. To lze zapsat pomocí blokových 2×2 maticí s bloky velikosti $n \times n$ jako

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n} = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Poslední rovnost platí, protože $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ komutuje se svou inverzní maticí $\left(\begin{smallmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{smallmatrix}\right)$. Pro pravý dolní blok tedy platí $-C^T B + A^T D = I_n$.