4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 6. 12. 2017.

Úloha 1. Existuje nespočetný systém podmnožin $\mathbb{N}$ takový, že průnik každých dvou z těchto množin je konečný?

Úloha 2. Najděte nejmenší přirozené číslo n, aby žádné z čísel n, $n+1$, $\ldots$, $n+37$ nemělo součet cifer dělitelný jedenácti.

Úloha 3. Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a g má periodu 1. Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 4. Nechť A je ne nutně komutativní algebra nad $\mathbb{R}$ s jednotkou e a φ je lineární funkcionál do $\mathbb{R}$ splňující $\varphi(e) = 1$ a $\varphi(x^2) = (\varphi(x))^2$. Dokažte, že φ je multiplikativní.

⋆ **Úloha 5.** Nechť S je n-prvková množina a $\mathcal{F}$ systém nějakých jejích podmnožin splňující $A \in \mathcal{F}, A \subset B \subset S \Rightarrow B \in \mathcal{F}$. Definujme funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(t) := \sum_{A\in\mathcal{F}} t^{|A|}(1-t)^{|S\setminus A|}.$$

Ukažte, že f je neklesající.

⋆ **Úloha 6.** Buď O daný bod v rovině. Jaký je maximální obsah trojúhelníka, jehož vrcholy A, B, C splňují $|OA| = 4$, $|OB| = 2\sqrt{3}$, $|OC| = \sqrt{22}$?
