4. soutěžní série

29. 11. 2017

Úloha 1. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice

$$x + y + z + xyz = xy + yz + zx + 2.$$

(5 bodů)

Úloha 2. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ označme X a Y po řadě středy stran AB a CD. Dokažte, že $XY \leq \frac{1}{2}(AD + BC)$ a zjistěte, kdy nastane rovnost.

(10 bodů)

Úloha 3. Z pozice $(1, 1)$ přesunujeme minci následovně. Z (a, b) ji můžeme přesunout na:

i) $(2a, b)$ nebo $(a, 2b)$,

ii) $(a - b, b)$ pro $a > b$ nebo $(a, b - a)$ pro $a < b$.

Najděte všechna $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, na která lze minci přemístit.

(10 bodů)

Úloha 4. Buď $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ spojitá funkce splňující $\int_0^1 f = 0$. Ukažte, že pro každé n přirozené existuje číslo $c \in (0, 1)$ takové, že

$$n \int_0^c x^n f(x) dx = c^{n+1} f(c).$$

(15 bodů)