5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 20. 12. 2017.

Úloha 1. Políčka na šachovnici 8×8 označíme čísly $1, \ldots, 64$. Pro každé z $64!$ očíslování π označíme $d(\pi)$ největší rozdíl čísel na dvou sousedních políčkách (dotýkajících se alespoň v jednom bodě). Najděte $\min_{\pi} d(\pi)$.

Úloha 2. Existuje podmnožina množiny celých čísel $X \subset \mathbb{Z}$ taková, že všechna $n \in \mathbb{Z}$ lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru $n = a+2b$, kde $a, b \in X$?

Úloha 3. V šestiúhelníku $ABCDEF$ vepsaném do kružnice o poloměru 1 mají strany AB, CD a EF délky 1. Označme středy stran BC, DE a FA písmeny K, L a M. Ukažte, že trojúhelník KLM je rovnostranný.

Úloha 4. Buď A reálná 3×3 matice, A^* označme matici adjungovanou k A. Ukažte

$$4\det(A^2 + A + I_3) \geq 3(\operatorname{tr} A + \operatorname{tr} A^*)^2.$$

⋆ **Úloha 5.** Nechť $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je ryze konvexní funkce splňující

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$

Ukažte, že (Newtonův) integrál $\int_0^\infty \sin\big(f(x)\big)\mathrm{d}x$ konverguje, ale ne absolutně.

⋆ **Úloha 6.** Buď A množina s $n^2 + n - 1$ prvky. Rozdělme všechny její n-prvkové podmnožiny do dvou skupin. Dokažte, že v nějaké skupině je alespoň n po dvou disjunktních množin.