5. soutěžní série – řešení

1. Označme N a O středy stran BC a CA, P střed NO. Pak trojúhelník MBN vznikne posunutím AMO a trojúhelník MNC vznikne otočením COM okolo P. Takže vždy stačí dvě části. Jelikož $|AM| = |MB|$ a MC je společnou stranou trojúhelníků AMC a MBC, jedna část stačí, pokud $|BC| = |CA|$ a trojúhelník AMC je navíc rovnoramenný. Není možné, aby $|AC| = |MC| = |BC|$ ani $|AC| = |AM| = |MB| = |BC|$. Proto jedna část stačí jen, když $|AM| = |MC| = |MB|$ a trojúhelník ABC je rovnoramenný a pravoúhlý.

2. Druhý hráč má vyhrávající strategii. Umístí-li první hráč číslo a na místo (i, j), odpoví druhý hráč umístěním $101 - a$ na místo $(i, 11 - j)$. Toto číslo i toto místo budou jistě volné. Na konci hry bude součet 1. a 10. sloupce stejný jako součet 2. a 9. sloupce, tj. matice bude singulární.

3. Označme $b_n = \sqrt{2(a_n^2 - 1)}$, pak $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n$ a $b_n^2 = 2a_n^2 - 2$, odkud $b_{n+1}^2 = 2(3a_n + 2b_n)^2 - 2 = 2(3a_n + 2b_n)^2 + (b_n^2 - 2a_n^2) = (4a_n + 3b_n)^2$, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Označíme-li

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = A^n = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},$$

pak

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ b_{2n+1} \end{pmatrix} = B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj. $a_{n+1} = p$, $a_{2n+1} = p^2 + qr$. Protože $\det A = 1$, máme $\det B = 1 = ps - qr$, tj. $a_{2n+1} = p^2 + ps - 1$, což evidentně nesoudělné s p.

4. Ano, zkonstruujeme příklad takové funkce. Označme $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ Cantorovo diskontinuum a položme $f(x) = \int_0^x \operatorname{dist}(t, \mathcal{C})\, dt$. Integrand je spojitý a nezáporný na $[0, 1]$ a na žádném intervalu není konstantně nulový, takže f je ryze rostoucí funkce, tedy speciálně je prostá. Dále $\mathcal{C}$ je uzavřená množina, takže $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{dist}(x, \mathcal{C}) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}$. Množina $f\left(\{x \in [0, 1], f'(x) = 0\}\right) = f(\mathcal{C})$ je tedy jakožto obraz nespočetné množiny v prostém zobrazení také nespočetná.