5. soutěžní série

13. 12. 2017

Úloha 1. V trojúhelníku ABC označme M střed strany AB. Je vždy možné rozdělit AMC na několik částí tak, aby se pomocí posunutí a otáčení přeskládaly na MBC? Pokud ano, kolik částí je potřeba?

(5 bodů)

Úloha 2. Dva hráči střídavě zapisují čísla 1, 2, …, 100 do matice 10×10 tak, že hráč na tahu vždy zvolí číslo, které dosud nebylo použito a zapíše ho na libovolné volné místo. První hráč vyhrává, pokud výsledná matice je regulární. V opačném případě vítězí druhý hráč. Kdo má vyhrávající strategii? (10 bodů)

Úloha 3. Mějme rekurentně zadanou posloupnost $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 2\sqrt{2(a_n^2 - 1)}$. Ukažte, že členy posloupnosti jsou kladná celá čísla, přičemž a_{n+1} a a_{2n+1} jsou nesoudělné. (15 bodů)

Úloha 4. Rozhodněte, zda existuje diferencovatelná funkce $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, pro kterou je množina $f\left(\{x \in [0,1], f'(x) = 0\}\right)$ nespočetná.

(15 bodů)