

6. soutěžní série

3. 1. 2018

Úloha 1. Lze z kružnice vybrat uzavřenou podmnožinu bodů obsahující právě jeden bod z každé dvojice protilehlých bodů? (5 bodů)

Úloha 2. Spočítejte determinant čtvercové matice A řádu n s prvky $a_{ij} = |i - j|$. (10 bodů)

Úloha 3. Pro každé $n \geq 2$ přirozené najděte nejmenší číslo $K(n)$, které splňuje: V každém grafu o $2n$ vrcholech a $K(n)$ hranách existuje cyklus délky 3. (10 bodů)

Úloha 4. Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo a x_1, \dots, x_{n-1} jsou kořeny polynomu $P(x) = x^n - 1$ různé od 1. Dokažte, že

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \dots + \frac{1}{1-x_{n-1}} = \frac{n-1}{2}.$$

(15 bodů)