# 2. soutěžní série – řešení

**1.** Označme si $p(x) = ax^m + q(x)$, kde $\deg q \leq m-1$. Koeficient u vedoucího členu $p$ musí splňovat $a^n = a$. Polynom $p = 0$ vyhovuje a ostatní vyhovující polynomy musí splňovat buď $a = \pm 1$ pro $n$ liché nebo $a = 1$ pro $n$ sudé. Pokud je polynom $q$ nenulový stupně $r$, pak druhý nejvyšší člen v polynomech $p^n(x) = p(x^n)$ má stupeň $(n-1)m + r = nr$. Odtud ale plyne $(n-1)(m-r) = 0$ a to není možné pro $n \geq 2$ a $r \leq m-1$. Jediné možné polynomy jsou $p = \pm x^m$ pro liché $n$ a $p = x^m$ pro sudé $n$, kde $m \in \mathbb{N}_0$, a $p = 0$. Snadno lze nahlédnout, že tyto polynomy splňují $p^n(x) = p(x^n)$.

**2.** Jelikož je 211 prvočíslo, je $T = \mathbb{Z}_{211}$ těleso a $V = \mathbb{Z}_{211}^{25}$ je vektorový prostor nad $T$. Tvrzení platí právě tehdy, když vektory odpovídající daným operacím generují celý prostor $V$. Je jich 25, takže generují $V$, právě když jsou lineárně nezávislé. Vyplňme tabulku dvěma čtverci $3 \times 3$ zasazenými do protějších rohů a dvěma čtverci $2 \times 2$ zasazenými do zbylých dvou rohů (prostřední políčko tabulky bude pak pokryto dvakrát, zbylá právě jednou). Jelikož otočení tohoto pokrytí o $90°$ nezmění pokrytí (neboli součet vektorů), ale změní umístění čtverců (tedy samotné vektory), vidíme, že naše vektory jsou lineárně závislé, a tedy tvrzení ze zadání neplatí.

**3.** Zajímá nás

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{a_n + 1}{a_n} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{(n+1)a_n} = \lim_{N\to\infty} \frac{a_{N+1}}{(N+1)!}$$

Označme $b_n = \frac{a_n}{n!}$, pak $n!b_n = n((n-1)!b_{n-1} + 1) = n!b_{n-1} + n$, tj. $b_n = b_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}$, tedy $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{a_{N+1}}{(N+1)!} = \lim_{N\to\infty} b_{N+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

**4.** Ukážeme, že $k = 2$. Snadno si rozmyslíme, že dvojice matic

$$\begin{aligned} A_1 &= (a^1_{ij})^n_{i,j=1},\ a^1_{11} = 1,\ a^1_{ij} = 0 \text{ pro } (i,j) \neq (1,1),\\ A_2 &= (a^2_{ij})^n_{i,j=1},\ a^2_{ij} = 1 \text{ pro } i = j+1 \mod n,\\ &\phantom{= (a^2_{ij})^n_{i,j=1},\ } a^2_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j+1 \mod n \end{aligned}$$

vyhovuje. $A_2$ je totiž permutační matice a $A_2^k A_1 A_2^m$ je matice, která má jedničku na pozici $(k,m)$ a jinde má nuly a takovéto matice generují prostor všech matic. Nyní ukážeme, že $k = 1$ nevyhovuje. Pro jednu matici $A$ je $S(A) = \{P(A), P \text{ polynom}\}$. Takže libovolné dvě matice z $s(A)$ spolu komutují, tj. $S(A) \neq M_n(\mathbb{R})$.