2. soutěžní série

24. 10. 2018

Úloha 1. Pro dané přirozené $n \geq 2$ najděte všechny polynomy p, pro které platí $p^n(x) = p(x^n)$. (10 bodů)

Úloha 2. (seriál) V tabulce 5×5 jsou zapsána celá čísla. Je dovoleno vybrat libovolný čtverec 3×3 nebo 2×2 a zvětšit v něm všechna čísla o 1. Je vždy možné postupným prováděním těchto operací dostat tabulku, v níž jsou všechna čísla dělitelná 211? (10 bodů)

Úloha 3. Uvažujme rekurentně zadanou posloupnost $a_1 = 1$, $a_n = n(a_{n-1} + 1)$ pro $n = 2, 3, \ldots$. Vypočtěte nekonečný součin

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\left(1 + \frac{1}{a_3}\right)\cdots$$

(10 bodů)

Úloha 4. Buď $n \in \mathbb{N}$ a $M_n(\mathbb{R})$ množina všech reálných $n \times n$ matic. Pro matice $A_i \in M_n(\mathbb{R})$ označme $S(A_1, \ldots, A_k)$ nejmenší množinu obsahující $A_1, \ldots, A_k$, která je uzavřená na konečné lineární kombinace a na násobení. Najděte nejmenší k, pro něž existuje k-tice $A_1, \ldots, A_k$, aby $S(A_1, \ldots, A_k) = M_n(\mathbb{R})$. (10 bodů)

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`