3. soutěžní série – řešení

1. Protože zároveň platí $a\cos\beta + b\cos\alpha = c$, je

$$0 = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^p & b^p & c^p \\ a^{2p-1} & b^{2p-1} & c^{2p-1} \end{pmatrix} = abc\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^{p-1} & b^{p-1} & c^{p-1} \\ \left(a^{p-1}\right)^2 & \left(b^{p-1}\right)^2 & \left(c^{p-1}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Ale to je Vandermondův determinant, tj. výraz je roven

$$abc(a^{p-1} - b^{p-1})(b^{p-1} - c^{p-1})(a^{p-1} - c^{p-1}),$$

tedy trojúhelník je rovnoramenný.

2. Uvažme matici $K \times L$ nad $\mathbb{Z}_2$ takovou, že každý z jejích K řádků je L-složkový vektor nul a jedniček reprezentující jeden klub. Ze zadaných podmínek plyne $AA^T = I_K$ a protože maticové násobení nezvyšuje hodnost, máme $L \geq \operatorname{rank}(A) \geq \operatorname{rank}(I_K) = K$.

3. Substitucí $x = \frac{t}{y}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\,\mathrm{d}t$ ve druhém integrálu máme $\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$

$$= \int_0^1 \int_0^y \frac{t^t}{y}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \int_0^1 t^t \int_t^1 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = \int_0^1 -\ln(t)t^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t,$$

kde poslední rovnost platí proto, že $\int_0^1 t^t(1+\ln(t))\,\mathrm{d}t = \left[t^t\right]_0^1 = 0$. Integrály se tedy rovnají.

4. Buď n nejmenší přirozené číslo soudělné se všemi čísly z S. V prvočíselném rozkladu n je každé prvočíslo v první mocnině (jinak by n nebylo nejmenší). Z vlastností množiny S v ní najdeme číslo s, které dělí n. Buď p prvočíslo, které dělí s, pak $n/p < n$, a tedy je n/p nesoudělné s nějakým $t \in S$. Protože však t a n jsou soudělná, máme nutně $NSD(n,t) = p$, a tudíž i $NSD(s,t) = p$.