4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 28. 11. 2018.

Úloha 1. Ukažte, že neexistuje konečná grupa, která by byla sjednocením dvou svých vlastních podgrup. Nalezněte konečnou grupu, která je sjednocením tří vlastních podgrup.

Úloha 2. Nechť $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná a $f(-1) = f(1) = 0$. Dokažte, že existuje $a \in (-1, 1)$ splňující $f(a) = (1+a^2)f'(a)$.

Úloha 3. Nechť $a_2, a_3, \ldots$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $a_2 = 2$ a $a_{mn} = a_m a_n$ pro nesoudělná $m, n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že $a_n = n$ pro všechna $n \geq 2$.

Úloha 4. Nechť matice $A \in M_n(\mathbb{C})$ má jediné vlastní číslo a. Ukažte, že A komutuje pouze s polynomy A právě tehdy, když $A - aI$ má hodnost $n - 1$.

Úloha 5. Na povrchu toru $\{(\sqrt{x^2 + y^2} - 2018)^2 + z^2 \leq 2018\}$ běhají dva vlci a zajíc rychlostmi nepřevyšujícími 1. Vlk chytí zajíce, pokud jejich vzdálenost je menší než 1. Rozhodněte, zda pro každé počáteční rozmístění zvířátek mohou vlci zajíce chytit (všichni vidí všude).

$\star$ **Úloha 6.** Buď $n \geq 2$ a S n-prvková množina. Nechť $A_1, \ldots, A_m$ jsou po dvou různé aspoň dvouprvkové podmnožiny S, které navíc splňují, že libovolná trojice má neprázdný průnik, pokud každé dvě množiny z té trojice mají neprázdný průnik. Dokažte, že $m \leq 2^{n-1} - 1$.