4. soutěžní série – řešení

1. Z Lagrangeovy věty existuje $x_0 \in (a,b)$, pro něž $f'(x_0) = 1$. Buď je $f(x_0) = x_0$, pak opět z Lagrangeovy věty najdeme $c_2 \in (a, x_0)$, že $f'(c_2) = 1$ a jsme hotovi. Pokud je $f(x_0) > x_0$, pak v intervalu (a, x_0) existuje x_1 s $f'(x_1) > 1$ a v intervalu (x_0, b) existuje x_2 s $f'(x_2) < 1$ (Lagrangeova věta). Protože derivace má Darbouxovu vlastnost (nabývá mezihodnot), najdeme mezi body x_1 a x_0 (resp. mezi x_0 a x_2) bod c_1 (resp. c_2) splňující $f'(c_1) = 1 + \varepsilon$ (resp. $f'(c_2) = \frac{1}{1+\varepsilon}$) pro dost malé ε. Pokud $f(x_0) < x_0$, dokáže se tvrzení obdobně.

2. Označme F matici $m \times n$, kde $F_{ij} = 1$, pokud j-tý člověk je členem klubu F_i, jinak je $F_{ij} = 0$. Analogicky definujeme matici D (také typu $m \times n$). Obě matice uvažujeme nad $\mathbb{Z}_2$. Jejich součin FD^T je pak identická matice řádu m. Jelikož násobení nezvyšuje hodnost, platí $n \geq \operatorname{rank}(F) \geq \operatorname{rank}(FD^T) = \operatorname{rank}(I_m) = m$, což jsme měli dokázat.

3. Zvolme libovolné $1 \leq j < i \leq n$. Předpokládejme $\pi(j) \leq \pi(i) - 1$. Pokud $j > 1$, pak z předpokládané vlastnosti π plyne existence $j' < j$ takového, že $|\pi(j) - \pi(j')| = 1$, tedy speciálně $\pi(j') \leq \pi(i) - 1$, neboť $\pi(j') \neq \pi(i)$. Odtud plyne, že $\pi(1) \leq \pi(i) - 1$. Obdobné argumenty pro $\pi(j) \geq \pi(i) + 1$ vedou k závěru: π zobrazuje $1, \ldots, i-1$ buď pouze na čísla větší než $\pi(i)$ nebo jen na čísla menší než $\pi(i)$ pro každé $i = 2, \ldots, n$. Každou permutaci lze proto sestrojit následovně: $\pi(i)$ pro $i = n, n-1, \ldots, 2$ je buď největší nebo nejmenší doposud nepřiřazené číslo. Počet vyhovujících permutací je 2^{n-1}.

4. We use complex numbers. Let the points be $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$, with $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ a n^{th} root of unity.

Then $a_i^2 = |1 - \zeta^i|^2 = (1 - \zeta^i)\overline{(1 - \zeta^i)} = (1 - \zeta^i)(1 - \frac{1}{\zeta^i}) = -\frac{\zeta^{2i} - 2\zeta^i + 1}{\zeta^i}$, so that $5 - a_i^2 = \frac{\zeta^{2i} + 3\zeta^i + 1}{\zeta^i}$.

Also, note that

$$\prod_{i=0}^{n-1} (z - \zeta^i) = z^n - 1.$$

Now we can compute:

$$\prod_{i=1}^{n-1} (5 - a_i^2) = \frac{1}{5} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\zeta^{2i} + 3\zeta^i + 1}{\zeta^i} \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{5} \prod_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \zeta^i \right)$$

$$= \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \zeta^i \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{5} \left(\left(-\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 \right) \left(\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left(\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - 2(-1)^n \right) = \left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}} \right)^2 = F_n^2.$$