5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 12. 12. 2018.

Úloha 1. Podél každé hrany konvexního mnohostěnu nakreslíme šipku jedním směrem tak, aby z každého vrcholu i do každého vrcholu vedla nějaká šipka. Kolik nejméně stěn musí být možné objet po směru šipek a bez odbočování mimo danou stěnu?

Úloha 2. Najděte všechna $(x, y) \in \mathbb{N}_0^2$ splňující $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$.

Úloha 3. Nechť $K \subset \mathbb{R}$ je neprázdná, uzavřená a omezená množina a nechť $f : K \to K$ je spojitá neklesající funkce. Musí existovat $x \in K$ takové, že $f(x) = x$?

Úloha 4. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je sudé a $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \{1, 2, \dots, n\}$ mají všechny sudý počet prvků. Dokažte, že existují čísla $1 \leq i < j \leq n$ taková, že $A_i \cup A_j$ má také sudý počet prvků.

Úloha 5. Nechť $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ je měřitelná a

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}$ konečné míry. Dokažte, že existuje $M \geq 0$ a $g \in L^1(\mathbb{R})$ (tzn. $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$) takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) \leq M + g(x)$.

$\star$ **Úloha 6.** Nakresleme kružnici o poloměru r okolo každého celočíselného bodu $x \in \mathbb{Z}^2$ kromě počátku. Nechť d_r je délka nejdelší úsečky vycházející z počátku a neprotínající žádnou z kružnic. Ukažte, že

$$\lim_{r \to 0} \left(d_r - \frac{1}{r} \right) = 0.$$