

5. soutěžní série

5. 12. 2018

Úloha 1. Sečtěte

$$\sum_{k=1}^{2018} \sin \frac{k}{2019} \cos \frac{2019-k}{2019}.$$

(5 bodů)

Úloha 2. Existuje permutace $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, pro niž

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < +\infty?$$

(10 bodů)

Úloha 3. Necht n, k jsou přirozená čísla splňující $k < n$. Dále necht $S = \{1, \dots, n\}$ a A_1, \dots, A_k jsou neprázdné podmnožiny S . Dokažte, že je možné obarvit některé prvky S modře a červeně tak, aby platilo:

- každý prvek S je modrý, červený, nebo neobarvený,
- alespoň jeden prvek S je obarvený,
- každá z množin A_1, \dots, A_k je buď celá neobarvená, nebo se v ní vyskytují obě barvy.

(10 bodů)

Úloha 4. Necht $A_1 = 0, A_2 = 1$ a pro $n > 2$ získáme A_n tak, že napíšeme za sebe čísla $A_{n-1}A_{n-2}$. Najděte všechna n , pro něž je A_n dělitelné 11. (10 bodů)