

2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 30. 10. 2019.

Úloha 1. Rozhodněte, jestli existují přirozená čísla $a, b > 2019$ taková, že pro žádné přirozené c netvoří a, b a c^2 strany trojúhelníka.

Úloha 2. Najděte minimum výrazu

$$(a - 1)^2 + (b/a - 1)^2 + (c/b - 1)^2 + (4/c - 1)^2$$

pro reálná čísla $1 \leq a \leq b \leq c \leq 4$.

Úloha 3. Najděte všechny diferencovatelné funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, které splňují

$$f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 4. Nechť n je přirozené číslo a A a B jsou komplexní matice $n \times n$ takové, že $(AB)^3$ je nulová matice. Pro která n toto implikuje, že $(BA)^3$ je nulová matice?

Úloha 5. Na tabuli je napsáno 2020 racionálních čísel. Ať smažeme kterékoliv z nich, lze zbylých 2019 čísel rozdělit do tří stejně početných skupin tak, že součin čísel v každé skupině je stejný. Najděte všechny 2020-tice, které na tabuli mohou být.

★ **Úloha 6.** Nechť f je racionální funkce s komplexními koeficienty, jejíž jmenovatel nemá vícenásobné kořeny. Nechť u_0, \dots, u_n jsou kořeny f a w_1, \dots, w_m jsou kořeny f' . Pokud u_0 je jednonásobný kořen, ukažte, že

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{w_k - u_0} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k - u_0}.$$