2. soutěžní série – řešení

1. Jejikož je druhá derivace nezáporná, první derivace musí být spojitá a neklesající. Pokud $f'(x_+) \geq 0$, pak je f neklesající na $[x_+, \infty)$, $x + f'(x) \geq x$, a tedy také $f(x + f'(x)) \geq f(x)$ na $[x_+, \infty)$. Obdobně z $f(x_-) \leq 0$ plyne že f je nerostoucí na $(-\infty, x_-]$, a tedy také $x + f'(x) \leq x$, $f(x + f'(x) \geq f(x)$ na $(-\infty, x_-]$. Neexistuje žádné $x \in \mathbb{R}$, ve kterém by nerovnost neplatila.

2. Uvažme mřížku 5×65. Je jenom 32 způsobů jak obarvit jeden sloupec této mřížky, tedy existují tři stejně obarvené sloupce. Nějaká barva se v nich musí vyskytovat alespoň třikrát. Tím dostáváme mřížku 3×3, ve které mají všechny vrcholy stejnouo barvu. Z ní už jednoduše vybereme pět vrcholů tvořící pětiúhelník ze zadání.

3. Nechť n je přirozené číslo a A a B jsou komplexní matice $n \times n$ takové, že $(AB)^3$ je nulová matice. Pro která n toto implikuje, že $(BA)^3$ je nulová matice?

Řešení: Odpověď zní 1, 2 a 3. Platí totiž, že $(BA)^4 = B(AB)^3 A = 0$. Proto označíme-li $M = BA$, pak $0 = M^4 = M^5 = M^6$. Z Caley-Hamiltonovy věty (ukážeme pro $n = 3$, pro $n = 2$ a $n = 1$ se udělá podobný krok) existují a, b, c, že $M^3 + aM^2 + bM + cI = 0$. Pokud $M^3 \neq 0$, pak vynásobením této rovnice M^3, M^2 a M dostaneme postupně $c = 0$, $b = 0$ a $a = 0$, tedy $M^3 = 0$.

Pro $n = 4$ (pro $n \geq 5$ jen doplníme do větší matice nulami) můžeme vzít $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pak dostaneme $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, což jednoduše splňuje dané podmínky.

4. Jistě m dělí $2 \cdot 3^n$. Pokud (m, n) je řešení, pak snadno nahlédneme, že $(\bar{m}, n)$, pro $\bar{m} = \frac{2 \cdot 3^n}{m}$ je také řešení. Navíc, je-li $m = 2 \cdot 3^k$, pak $\bar{m} = 3^{n-k}$ a naopak. Stačí tedy hledat jen řešení, kde $m = 3^k$. Pro takové m máme rovnici

$$3^k + 2 \cdot 3^{n-k} = 2^{n+1} - 1. \tag{1}$$

Je-li k nebo $n - k \leq 2$, snadno najdeme jediná řešení $(k, n) = (2, 3), (2, 5)$. Jsou-li k, $n - k \geq 3$, je pravá strana dělitelná číslem 27, tj. $27 | 2^{n+1} - 1$. Odtud, $18 | n + 1$ a protože $73 | 2^{18} - 1$, máme $73 | 2^{n+1} - 1$ a chceme tedy $73 | 3^k + 2 \cdot 3^{n-k}$. Protože $3^k \equiv \pm 1, 3, 9, 27, 8, 24$ mod 73, rozebráním možností dojdeme ke sporu, tj. žádná další řešení neexistují.

Dvě řešení nalezená výše dávájí čtyři řešení úlohy $(m, n) = (9, 3), (6, 3), (9, 5), (54, 5)$.

Jiné řešení. Rovnici (1) můžeme také přepsat do tvaru $2^{a+b+1} - 1 = 3^a + 2 \cdot 3^b$. Pak v případě $\min(a, b) \geq 3$ máme nutně a sudé a b liché a dále

$$\min(a,b) \leq \nu_3(3^a + 2 \cdot 3^b) = \nu_3\left(2^{a+b+1} - 1\right) = \nu_3\left(4^{\frac{a+b+1}{2}} - 1\right) = 1 + \nu_3\left(\frac{a+b+1}{2}\right)$$

$$\leq 1 + \nu_3(\max(a,b)) \implies \max(a,b) \geq 3^{\min(a,b)} - 1.$$

$$2^{\max(a,b)+\min(a,b)+1} = 2^{a+b+1} = 1 + 3^a + 2 \cdot 3^b > 3^{\max(a,b)}$$

$$\implies 2^{\min(a,b)+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{\max(a,b)} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{3^{\min(a,b)}-1}$$

což pro $\min(a, b) \geq 3$ neplatí, tj. spor.