3. soutěžní série – řešení

1. Pro $k = 2^n + 1$ bodů z Dirichletova principu najdeme dva takové, že se jejich n souřadnic shoduje modulo 2, a střed úsečky spojující tyto dva body má celočíselné souřadnice. Umístěním 2^n bodů na souřadnice vrcholů jednotkové krychle $\{0,1\}^n$ dostaneme rozmístění, v němž středy úseček mají vždy nějakou neceločíselnou souřadnici.

2. a) Hledejme řešení tvaru ax^b. Musí platit $x = a(abx^{b-1})^b = a^{b+1}b^b x^{b^2-b}$. Tato rovnost je splněna pro $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a = b^{\frac{-b}{b+1}}$.

b) Vidíme, že f musí být na a f' musí být prostá, tedy speciálně monotonní (plyne např. z Darbouxovy vlastnosti derivace). Pokud by f' změnila znaménko v x_0, pak by f měla v x_0 globální extrém a nemohla by být na. Takže f' nemění znaménko, f je monotonní a musí být bijekcí $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Zároveň ale f musí zobrazit obraz f' na $\mathbb{R}$, obraz f' je ale interval neobsahující nulu. Spor.

3. Plyne to z následujících výpočtů :

$$\left\lfloor \frac{(p-1)!}{e} \right\rfloor = \lfloor (p-1)! \cdot e^{-1} \rfloor = \left\lfloor (p-1)! \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right) \right\rfloor = (p-1)! \left(\sum_{k=0}^{p-2} \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$
$$\equiv \sum_{k=0}^{p-2} (p-k-1)! \pmod{p} = \sum_{t=1}^{p-1} t! \equiv \sum_{t=1}^{p} t! \pmod{p}.$$

4. Pro $n \leq 2$ jistě ne. Ukážeme, že pro $n \geq 3$ ano. Umístěme nenulová čísla r_i po řadě na pozice $(\sigma(i), i)$, kde σ je nějaká permutace bez pevných bodů. Rozmyslete si, že pokud je σ složená z cyklů σ_j, $j = 1, \dots, k$, které rozkládají množinu $\{1, \dots, n\}$ na $T_1 \cup \dots \cup T_k$, $|T_j| = k_j$, pak charakteristický polynom matice A je

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{j=1}^{k} \left(\lambda^{k_j} - \prod_{i \in T_j} r_i \right).$$

Chtěli bychom, aby $p(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - r_i)$. Pokud n je liché, stačí vzít jeden cyklus $(1, \dots, n)$ a $r_i = \omega^i$, kde ω je primitivní n-tá odmocnina z 1. Pak totiž $\omega^1 \dots \omega^n = \omega^{\frac{1}{2}n(n+1)} = 1$ a $p(\lambda) = \lambda^n - \omega^1 \dots \omega^n = \lambda^n - 1$, což jsme potřebovali. Pro $n = 2m$ sudé stačí vzít dva cykly $(1, \dots, m)$, $(m+1, \dots, 2m)$ a $r_i = \omega^{2i-1}$ pro $i \leq m$ a $r_i = \omega^{2i}$ pro $i > m$. Pak opět máme

$$p(\lambda) = (\lambda^m - \omega^1\omega^3 \dots \omega^{2m-1})(\lambda^m - \omega^2\omega^4 \dots \omega^{2m}) = (\lambda^m - \omega^{m^2})(\lambda^m - \omega^{m(m+1)})$$
$$= (\lambda^m - 1)(\lambda^m + 1) = \lambda^n - 1.$$