

5. soutěžní série

4. 12. 2019

Úloha 1. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu n mincemi padne lichý počet pannen, je-li k -tá mince vyvážená tak, že pravděpodobnost panny je $\frac{1}{2^{k+1}}$? Výsledek запиšte jako racionální funkci n . (5 bodů)

Úloha 2. Najděte všechny dvojice m, n přirozených čísel větších než jedna, pro něž platí

$$1!3!5! \dots (2n-1)! = m!$$

(10 bodů)

Úloha 3. Najděte dimenzi prostoru lineárních operátorů φ na M_n splňujících $\varphi(A^T) = (\varphi(A))^T$ pro všechny matice $A \in M_n$.

(10 bodů)

Úloha 4. Buď f spojitě diferencovatelná funkce na $[0, 1]$ s derivací $f' \in (0, 1]$ splňující $f(0) = 0$. Ukažte, že

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 f(x)^3 dx,$$

a najděte všechny funkce f , pro které nastává rovnost. (15 bodů)