6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 8. 1. 2020.

Úloha 1. Nechť M a N jsou různé čtvercové matice splňující $M^3 = N^3$ a $M^2N = N^2M$. Je možné, aby $M^2 + N^2$ byla regulární?

Úloha 2. Nechť spojitá funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ splňuje $\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Ukažte, že f je nulová funkce.

Úloha 3. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho takových přirozených čísel n, že $2n + 1$ i $3n + 1$ jsou čtverce. Ukažte, že všechna taková n jsou násobky čtyřiceti.

Úloha 4. Pro každé přirozené číslo i definujme permutaci $\pi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ předpisem

$$\begin{pmatrix} ki+1 & ki+2 & \dots & ki+i \\ ki+i & ki+i-1 & \dots & ki+1 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dále definujme $A_n = \pi_2\pi_3 \dots \pi_n(1)$. Ukažte, že posloupnost (A_n) je rostoucí.

Úloha 5. Je možné vrcholy libovolného čtyřregulárního grafu (každý vrchol má stupeň 4) pokrýt navzájem disjunktními oblouky a hvězdami? Oblouk tvoří dva vrcholy spojené hranou, hvězdu tvoří vrchol a všichni jeho sousedé.

⋆ **Úloha 6.** Buď V vektorový prostor dimenze n nad tělesem charakteristiky $p \neq 0$ a $A : V \to V$ afinní zobrazení, tj. $Ax = Bx + c$ pro nějaká $B : V \to V$ lineární a $c \in V$. Pak existuje $k \leq np$, že A^k má pevný bod. Dokažte.

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`