1. soutěžní série – řešení

1. $\sum v_r^2 - p_r^2 = \sum(v_r + p_r)(v_r - p_r) = (n-1)\sum(v_r - p_r) = (n-1)(\sum v_r - \sum p_r) = 0.$

2. Definujme funkci T na přirozených číslech takovou, že pokud $m = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_{\ell_m}^{a_{\ell_m}}$, kde p_i jsou prvočísla (a ℓ_m je počet prvočíselných dělitelů m), a pokud platí $p_i^{a_i} = \max_{j=1,\dots,\ell_m} p_j^{a_j}$, pak $T(m) = p_i$. Povšimněme si, že potom platí $p_i^{a_i} \geq m^{\frac{1}{\ell_m}}$.

Nechť $x \in \mathbb{N}$ splňuje, že $x+1, \dots, x+\frac{p+3}{2}$ mají všechny prvočíselné dělitele menší nebo rovny p. Protože pro každé $i = 1, \dots, \frac{p+3}{2}$ je $T(x+j)$ prvočíslo menší než p a protože těch je nanejvýš $\frac{p+1}{2}$ (krom dvojky jen lichá čísla větší než jedna, kterých je $\frac{p-1}{2}$), existují $1 \leq i < j \leq \frac{p+3}{2}$, že $T(x+i) = T(x+j)$. Označme toto prvočíslo $T(x+i) = T(x+j)$ jako q. Nechť $q^a \mid x+i$ a $q^b \mid x+j$, a tato a a b jsou největší taková čísla. Pak $\min(q^a, q^b) \mid (x+j) - (x+i) = j - i$. Protože $x+i$ i $x+j$ má nanejvýš $\frac{p+1}{2}$ prvočíselných dělitelů, dostáváme

$$\frac{p+1}{2} \geq j - i > \min(q^a, q^b) > (\min\{x+i, x+j\})^{\frac{1}{\frac{p+1}{2}}} > x^{\frac{2}{p+1}}.$$

Takže pro $x > \left(\frac{p+1}{2}\right)^{\frac{p+1}{2}}$ to nastat nemůže.

3. Na intervalech $(\frac{2n}{2r}, \frac{2n}{2r-1})$, $r = 2, \dots, n$ je integrandem $r - \frac{n}{x}$, na intervalech $(\frac{2n}{2r+1}, \frac{2n}{2r})$, $r = 1, \dots, n-1$ je integrandem $\frac{n}{x} - r$. Integrací konstanty přes $(\frac{2n}{2r+1}, \frac{2n}{2r})$ dostaneme $-r(\frac{2n}{2r} - \frac{2n}{2r+1}) = -\frac{n}{2r+1}$ a na následném intervalu $(\frac{2n}{2r+2}, \frac{2n}{2r+1})$ máme $\frac{n}{2r+1}$, což se sečte na nulu. Integrací $\frac{1}{x}$ přes $(\frac{2n}{2r+1}, \frac{2n}{2r})$ dostaneme $n \ln \frac{2r+1}{2r}$ a na následujícím intervalu $(\frac{2n}{2r+2}, \frac{2n}{2r+1})$ máme $-n \ln \frac{2r+2}{2r+1}$, což se sečte na $-n \ln(\frac{2r+2}{2r+1} \cdot \frac{2r}{2r+1})$, tedy logaritmujeme výraz $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}$ konvergující dle nápovědy k $\frac{\pi}{4}$. Limitou je $\ln \frac{4}{\pi}$.

4. a) Z konvexity plyne, že v každém směru $\varphi \in [0, 2\pi]$ z P množina obsahuje všechny body vzdálené méně než $f(\varphi) \in (0, \infty)$ a žádné body vzdálené alespoň $f(\varphi)$. Vezměme polopřímku směřující ve směru φ a její bod X neležící v množině. Dle otevřenosti okolo P musí množina obsahovat úsečku AB se středem P kolmou na naší polopřímku. Celá úsečka $A'B'$ středově souměrná s AB podle bodu X díky konvexitě naopak nesmí ležet v množině (jinak by X byl středem dvou bodů obsažených v množině). Funkce f je na okolí φ odpovídajícím výseči $A'PB'$ omezená $|PA'|$. Zbývá ukázat, že f je omezená na celém $[0, 2\pi]$. Kdyby nebyla, pak existuje posloupnost (φ_n) splňující $\lim_{n\to\infty} f(\varphi_n) = \infty$. Díky omezenosti intervalu $[0, 2\pi]$ dokonce musí existovat konvergující podposloupnost $\varphi_{n_k} \to \varphi_0$, ale na okolí φ_0 je f omezená, spor. Závěr šel také zdůvodnit pomocí konečného otevřeného podpokrytí kompaktu.

b) Protipříkladem je pruh $0 < y < 1$ sjednocený s bodem $P = (0, 0)$. Je konvexní, v žádném směru od $(0, 0)$ neobsahuje celou polopřímku a není omezený.