1. soutěžní série

5. 10. 2020

Úloha 1. Turnaje se účastní n hráčů. Každý z nich hraje $n-1$ zápasů, po jednom s každým soupeřem. Označme v_r a p_r po řadě počet výher a proher r-tého hráče (remízy nejsou možné). Ukažte, že platí

$$\sum_{r=1}^{n} v_r^2 = \sum_{r=1}^{n} p_r^2.$$

(5 bodů)

Úloha 2. Nechť $p \geq 3$ je prvočíslo. Ukažte, že existuje kladné celé k takové, že kdykoliv vezmeme $\frac{p+3}{2}$ po sobě jdoucích celých čísel větších než k, pak některé z nich je dělitelné prvočíslem větším než p.

(10 bodů)

Úloha 3. Buď $\|x\|$ vzdálenost x od nejbližšího celého čísla. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_1^n \left\| \frac{n}{x} \right\| \mathrm{d}x.$$

Můžete využít, že $\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots = \frac{\pi}{2}$. (10 bodů)

Úloha 4. Nechť konvexní otevřená množina v rovině obsahuje bod P, ale žádnou celou polopřímku vycházející z P. Pak je tato množina omezená.

(a) Dokažte tvrzení.

(b) Ukažte, že vynecháme-li předpoklad otevřenosti, tvrzení neplatí.

Množina je konvexní, jestliže s každými dvěma body obsahuje i úsečku spojující tyto body. Množina je otevřená, jestliže každý bod má v množině i nějaký kruh okolo sebe. (15 bodů)