3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 9. 11. 2020.

Úloha 1. Mějme množinu 2020 bodů v rovině. Ukažte, že mezi nimi nalezneme alespoň 45 různých vzdáleností.

Úloha 2. Buď S_n n-prvková množina. Existuje binární operace $*$ na S_n taková, že

1) platí pravá kancelace, tj. z $a * c = b * c$ plyne $a = b$ pro všechna $a, b, c \in S_n$,

2) nikdy není asociativní, tj. neexistují $a, b, c \in S_n$ takové, že $(a * b) * c = a * (b * c)$?

Úloha 3. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Jako $\sigma(n)$ označme součet kladných dělitelů n a jako $\phi(n)$ označme počet kladných $m \leq n$ nesoudělných s n. Ukažte, že

$$\frac{1}{\sigma(n)} + \frac{1}{\phi(n)} \geq \frac{2}{n}$$

a určete, kdy nastává rovnost.

Úloha 4. Pro přirozené číslo n označme $S(n)$ počet jedniček v jeho binárním zápisu. Dále, je-li $2^k \leq n < 2^{k+1}$, položme $L(n) = 2^k$. Vypočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L(n)^2 S(n)}.$$

Úloha 5. Buď $S = S_0$ množina bodů v $\mathbb{R}^3$. Nechť

$$S_n = \{P : P \text{ leží na uzavřené úsečce } AB \text{ pro nějaká } A, B \in S_{n-1}\}.$$

Ukažte, že $S_2 = S_3$.

⋆ **Úloha 6.** Označme e_n, resp. o_n počet grafů na n neoznačených vrcholech, které mají sudý, resp. lichý počet hran (izomorfní grafy považujeme za stejné). Ukažte, že $e_n \geq o_n$ pro každé n.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`