4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 23. 11. 2020.

Úloha 1. Předposlední číslice 3^n je sudá. Dokažte.

Úloha 2. Buď $S = \left\{\pm\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) : m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Určete množinu hromadných bodů S.

Úloha 3. Nechť funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, kde $b \geq a + 2$, je dvakrát diferencovatelná, $|f(x)| \leq 1$ a $|f''(x)| \leq 1$ pro všechna $x \in [a, b]$. Ukažte, že $|f'(x)| \leq 2$.

Úloha 4. Buď X n-prvková množina, $n > 12$ a F systém čtyřprvkových podmnožin X takový, že průnik dvou různých množin z F je nejvýše dvouprvkový. Ukažte, že existuje podmnožina $S \subset X$ obsahující aspoň $\sqrt[3]{6n+3}$ prvků, jejíž žádná čtyřprvková podmnožina není v F.

Úloha 5. V prostoru jsou dány tři body tvořící ostroúhlý trojúhelník. Ukažte, že lze najít další dva body tak, že žádné tři z pětice bodů nejsou kolineární a každá přímka procházející dvěma z nich je kolmá na rovinu obsahující zbylé tři.

⋆ **Úloha 6.** Nechť X, Y jsou dvě komplexní $n \times n$ matice, pro něž $2Y^2 = XY - YX$ a hodnost $X - Y$ je jedna. Ukažte, že $Y^3 = YXY$.