

4. soutěžní série

16. 11. 2020

Úloha 1. Ukažte, že pokud x, y, z jsou přirozená čísla taková, že $x^3y^5z^6$ je sedmá mocnina přirozeného čísla, pak i $x^5y^6z^3$ je sedmá mocnina přirozeného čísla. (5 bodů)

Úloha 2. Ukažte, že jednotkový čtverec nelze pokrýt třemi množinami, které mají všechny menší průměr než $\frac{1}{8}\sqrt{65}$. Průměr množiny je M je $\sup\{\|x - y\| : x, y \in M\}$. (10 bodů)

Úloha 3. Buď $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pak existuje $x \in \mathbb{R}$ a prostá posloupnost x_1, x_2, \dots tak, že $x_n \rightarrow x$ a $f(x_n) \rightarrow f(x)$. (10 bodů)

Úloha 4. Nechť G je grupa s jednotkovým prvkem e a nechť $g, h \in G$ splňují $ghg = hg^2h$, $g^3 = e$ a existuje liché n takové, že $h^n = e$. Ukažte, že $h = e$. (15 bodů)

Vaše řešení nahrávejte do moodlu. Je možno nahrát i více souborů. Uvítáme, pokud jména souborů budou indikovat, které úlohy soubor obsahuje.