5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 7. 12. 2020.

Úloha 1. Nechť $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňuje $f(f(n)) = f(f(n+2)+2) = n$ pro všechna celá $n \in \mathbb{Z}$ a nechť $f(0) = 1$. Dokažte, že $f(n) = 1 - n$.

Úloha 2. Nechť S je množinou čísel tvaru $a^2 + 2b^2$, kde a a b jsou přirozená. Ukažte, že pokud $p^2 \in S$ pro prvočíslo p, pak i $p \in S$.

Úloha 3. Matice A, B, $A+B$ mají hodnost 1. Ukažte, že buď všechny řádky A a všechny řádky B jsou násobky nějakého vektoru v, nebo všechny sloupce A a všechny sloupce B jsou násobky nějakého vektoru v.

Úloha 4. Nechť $\alpha > \frac{1}{2}$ je reálné číslo. Ukažte, že neexistuje žádná funkce $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in [0,1]$ platí

$$f(x) = 1 + \alpha \int_x^1 f(t)f(t-x)dt.$$

Úloha 5. Mějme uzavřený trojúhelník T a posloupnost bodů P_0, A_0, P_1, A_1, … takovou, že pro všechna $i \geq 0$ platí: A_i je střed úsečky P_iP_{i+1} a $P_iP_{i+1} \cap T = \{A_i\}$. Ukažte, že $P_0 = P_n$ pro nějaké n přirozené.

⋆ **Úloha 6.** Pokud $a, b \in \mathbb{R}$, pak jako $[a, b]$ budeme označovat uzavřený interval mezi a a b, nezávisle na tom, které z nich je větší. Pro $n \in \mathbb{N}$ a dvojici funkcí $f, g : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ definujeme *vzdálenost* f a g jako velikost množiny

$$\bigcup_{i=1}^{n} [f(i), g(i)].$$

Ukažte, že pro každé $\alpha \in (0,1)$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a 2020^n funkcí $f_i : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ takových, že vzdálenost f_i a f_j je alespoň αn pro každé $i \neq j$.
