

## 5. soutěžní série

30. 11. 2020

**Úloha 1.** Kolik bijekcí  $f$  na množině  $\{1, 2, \dots, n\}$  je takových, že pro každé  $i \geq 2$  existuje  $j < i$  splňující  $|f(i) - f(j)| = 1$ ? (5 bodů)

**Úloha 2.** Nalezněte všechny funkce  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  takové, že pro všechna  $x, y \in \mathbb{Z}$  platí

$$(f(x + y))^2 = f(x^2) + f(y^2).$$

(10 bodů)

**Úloha 3.** Ukažte, že všechny kořeny polynomu

$$11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11$$

leží na jednotkové kružnici.

(10 bodů)

**Úloha 4.** Necht' čtvercová matice  $P$  splňuje  $P^2 = P$  a není ani nulová, ani jednotková. Existuje vždy matice  $Q$  splňující  $Q^2 = Q$ ,  $PQ = QPQ$ , ale  $QP \neq PQ$ ? (15 bodů)

Vaše řešení nahrávejte do moodlu. Je možno nahrát i více souborů. Uvítáme, pokud jména souborů budou indikovat, které úlohy soubor obsahuje.