

## 6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 21. 12. 2020.

**Úloha 1.** K danému úhlu  $AOB$  a vnitřnímu bodu  $P$  sestrojte přímkou procházející  $P$ , která uřízne trojúhelník s nejmenším možným obsahem.

**Úloha 2.** Ukažte, že pro  $n \geq 3$  existuje  $n - 1$  přímek takových, že vnitřek každého čtverce šachovnice  $n \times n$  protíná aspoň jedna.

**Úloha 3.** Pro přirozené číslo  $n$  platí, že první tři cifry v dekadickém zápisu čísla  $4^n$  jsou stejné jako v dekadickém zápisu čísla  $5^n$ . Ukažte, že tyto tři cifry jsou buď 464 nebo 215.

**Úloha 4.** Na desetimetrovém drátě sedí  $N \geq 4$  ptáků. Každý z nich pozoruje ptáka, který je k němu nejbližší. Jaká je střední hodnota počtu ptáků, kteří nejsou pozorováni? Každý pták si sedl na náhodně zvolené místo (při rovnoměrném rozdělení) a bez ohledu na to, kde sedí ostatní.

**Úloha 5.** Buď  $Y \subset (0, 1)$  spočetná a  $(a_n)$  posloupnost kladných čísel taková, že  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 1$ . Ukažte, že existuje posloupnost po dvou disjunktních uzavřených intervalů  $I_n$  taková, že délka  $I_n$  je rovna  $a_n$  a každý bod  $Y$  leží ve vnitřku některého intervalu  $I_n$ .