6. soutěžní série

14. 12. 2020

Úloha 1. Přestupný rok má 366 dní, ostatní roky jich mají 365. Rok n je přestupný, pokud (a) 4 dělí n, ale 100 nedělí n, nebo (b) 400 dělí n. Rozhodněte, zda pro náhodně zvolené n bude pravděpodobnost, že Štědrý den bude ve čtvrtek, rovná $\frac{1}{7}$. (Přesněji, pokud $C(n)$ je počet let mezi 1 a n, kdy Štědrý den připadne na čtvrtek, je potom $\lim_{n\to\infty} \frac{C(n)}{n} = \frac{1}{7}$?) (5 bodů)

Úloha 2. Kolik z čísel $\frac{1}{2}k(k+1)$, $k = 1, 2, \ldots, 20!$ je dělitelných $20!$? (10 bodů)

Úloha 3. Matice A řádu n splňuje $3A^3 = A^2 + A + I$. Ukažte, že posloupnost A^k konverguje k matici B splňující $B^2 = B$. (10 bodů)

Úloha 4. Mějme rekurentně zadanou posloupnost polynomů $p_1(x) = 1+x$, $p_2(x) = 1+2x$ a $p_{2n+1}(x) = p_{2n}(x)+(n+1)xp_{2n-1}(x)$, $p_{2n+2}(x) = p_{2n+1}(x) + (n+1)xp_{2n}(x)$ pro $n \geq 1$. Označme a_n největší reálný kořen polynomu p_n. Ukažte, že posloupnost (a_n) je dobře definovaná, rostoucí a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (15 bodů)

Vaše řešení nahrávejte do moodlu. Je možno nahrát i více souborů. Uvítáme, pokud jména souborů budou indikovat, které úlohy soubor obsahuje.

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`