1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 11. 10. 2021.

Úloha 1. Dort má tvar trojúhelníka, jehož jeden vnitřní úhel je třikrát větší než jiný vnitřní úhel. Dokažte, že můžeme jedním rovným řezem rozříznout dort tak, že výsledné kusy půjdou zabalit (bez převracení) do krabice stejného tvaru a velikosti jako dort, avšak zrcadlově převrácené.

Úloha 2. Dokažte, že pro každou nekonstantní funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existují reálná čísla x, y taková, že $f(x+y) < f(xy)$.

Úloha 3. Existuje polynom f stupně 2021 s celočíselnými koeficienty takový, že čísla $f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \ldots$ jsou po dvou nesoudělná pro všechna $n \in \mathbb{Z}$?

Úloha 4. *Výškou* v konvexním pětiúhelníku nazveme kolmici spuštěnou z vrcholu na protější stranu (tj. na tu, která nemá společný bod s ani jednou ze stran, pro které je zvolený vrchol krajním bodem). Dokažte, že pokud se čtyři výšky protínají v jednom bodě, pak tímto bodem prochází i pátá výška.

Úloha 5. Letecké linky mezi n městy provozuje k společností. Každá dvě města spojuje přímá linka (bez mezipřistání) některé ze společností a všechny provozované linky jsou obousměrné. Ukažte, že pokud $n \geq 2^k + 1$, pak aspoň jedna společnost může nabídnout okružní cestu navštěvující lichý počet měst. Je to pravda i pro $n = 2^k$?

Úloha 6. Označme $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). O funkci $f\colon S^k \to S$ řekneme, že *konvenuje* binární relaci $\maltese$ (na S), pokud

$$f(a_1, \ldots, a_k) \maltese f(b_1, \ldots, b_k) \;\Rightarrow\; \exists i \leq k\colon a_i \maltese b_i.$$

Dokažte, že pokud f konvenuje relacím $=$ a $<$, pak konvenuje všem binárním relacím na S.

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`