2. soutěžní série – řešení

1. Všimněme si, že $x > 1$ implikuje $z < 1$ (3. rovnice), z čehož plyne $y > 1$ a odtud $x < 1$, spor. Naopak z $x < 1$ dostaneme $x > 1$, spor. Jediné řešení v kladných číslech je tedy $x = y = z = 1$ (ověříme dosazením).

2. Všimneme si, že v jednom tahu vždy obrátíme buď žádnou nebo dvě rohové mince. Proto nutně potřebujeme, aby na jedné z rohových mincí na začátku už byl orel. V takovém případě už ale lze obrátit i všechny zbylé tak, že převrátíme $(n-1)$ rovnoběžek se stranou protilehlou počáteční minci.

3. Existuje. Možná konstrukce jsou funkce tvaru V, které mají různě posunuté vrcholy. Přesněji: Zobrazením $\alpha \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha = \beta$ bijektivně zmáčkneme interval $(-\infty, \infty)$ na $(0,1)$. Pak zadefinujeme funkci f_β jako lomenou čáru procházející body $(0,1)$, $(\beta, 0)$, $(1,1)$, $f_\beta = 1 - \frac{x}{\beta}$ na $[0, \beta]$, $f_\beta = \frac{x-\beta}{1-\beta}$ na $(\beta, 1]$. Všechny funkce prochází dvěma body $(0,1)$ a $(1,1)$. Pro $\beta_1 < \beta_2$ se navíc protnou v bodě x_0, kde $\frac{x_0 - \beta_1}{1-\beta_1} = 1 - \frac{x_0}{\beta_2}$, tedy $x_0 = \frac{\beta_2}{1+\beta_2-\beta_1}$, což roste vzhledem k β_1. Tím vidíme, že pro $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ už funkce mají jen dva krajní společné body.

4. Pokud $n \equiv 1$, pak $f(n) \equiv 1 + 2 + \cdots + (p-1) = \frac{p-1}{2} p \equiv 0$. Pro $n \not\equiv 1$ máme $(1-n) f(n) = 1 + n + n^2 + \cdots + n^{p-2} - (p-1) n^{p-1}$, $(1-n)^2 f(n) = 1 - p n^{p-1} + (p-1) n^p \equiv 1 - n^p \equiv 1 - n$, proto $f(n) \equiv (1-n)^{-1} \not\equiv 0$. Vidíme, že z $f(n) \equiv f(m) \equiv 0$ plyne $n \equiv 1 \equiv m$. Jinak z $f(n) \equiv f(m) \not\equiv 0$ plyne $(1-n)^{-1} \equiv (1-m)^{-1}$, tedy $1 - n \equiv 1 - m$.