2. soutěžní série

18. 10. 2021

Úloha 1. Nelezněte všechny trojice kladných reálných čísel x, y, z takové, že

$$x = \frac{1}{y^2 + y - 1},$$
$$y = \frac{1}{z^2 + z - 1},$$
$$z = \frac{1}{x^2 + x - 1}.$$

(5 bodů)

Úloha 2. V trojúhelníkové síti uvažujme trojúhelník o hraně n. Na jeho uzly rozmístíme $\frac{1}{2}(n+1)n$ mincí (na každý jednu) tak, že na právě jedné minci bude na horní straně orel. V jednom tahu zvolíme dvě sousední mince A a B a obrátíme všechny mince na přímce AB. Pro jaké počáteční pozice je možné konečným počtem tahů získat orly na horních stranách všech mincí zároveň? (10 bodů)

Úloha 3. Existuje třída funkcí $f_\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ taková, že grafy každých dvou funkcí se protnou právě ve třech bodech a grafy každých tři funkcí se protnou právě ve dvou bodech? (10 bodů)

Úloha 4. Buď $f(n) = 1 + 2n + 3n^2 + ... + (p-1)n^{p-2}$, kde p je liché prvočíslo. Dokažte, že pokud $f(m) \equiv f(n) \pmod{p}$, pak $m \equiv n \pmod{p}$. (15 bodů)