3. soutěžní série – řešení

1. Jediné řešení je $(6,3)$. Případ $y \leq 2$ vyloučíme na konci řešení. Pro $y \geq 3$ je pravá strana dělitelná třemi, tj. také x bude dělitelné třemi. Pro $x = 3$ je levá strana menší než 2019 (žádné řešení) a pro $x = 6$ je pravá strana rovna 2025, což dává řešení $(6,3)$. Pro $x \geq 9$ už je pravá strana větší než $3^9 > 8000$, tedy y by muselo být určitě větší než 5. Ale pro $y \geq 6$ dává pravá strana po dělení devíti zbytek 3, zatímco levá strana bude dělitelná devíti, tj. žádné řešení s $x \geq 9$ neexistuje. Pro $y = 1$, 2 už víme, že při $x = 6$ je levá strana moc velká a snadno ověříme, že pro $x = 5$ je levá strana moc malá.

2. Pišme

$$0 \leq \int_0^1 (\alpha - x)^2 f(x) = \int_0^1 \alpha^2 f(x) - 2\int_0^1 \alpha x f(x) + \int_0^1 x^2 f(x) = \alpha^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2 = 0.$$

Odtud $\int_0^1 (\alpha - x)^2 f(x) = 0$, tj. nutně $f(x) = 0$ skoro všude, tj. všude (neboť f je spojitá), což je ale spor s $\int_0^1 f(x) = 1$.

Jiné řešení: Aplikujme Hölderovu nerovnost na funkce $x\sqrt{f(x)}$ a $\sqrt{f(x)}$ s $p = q = 2$:

$$\alpha = \int_0^1 x f(x) \leq \left(\int_0^1 x^2 f(x)\right)^{1/2} \left(\int_0^1 f(x)\right)^{1/2} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{1} = \alpha.$$

V Hölderově nerovnosti tedy nastává rovnost, což v případě $p = q = 2$ znamená, že jedna funkce je násobkem druhé, což evidentně funkce $x\sqrt{f(x)}$ a $\sqrt{f(x)}$ nesplňují.

3. Nechť H je libovolná podgrupa G. Protože G je konečná, je i H konečná. Nechť $\{a_1, \ldots, a_n\}$ je nějaká minimální množina generátorů H. (Jako $(a, b, c, \ldots)$ budeme značit grupu generovanou prvky $a, b, c, \ldots$.) Pro každé $i \neq j$ jsou (a_i) a (a_j) podgrupy G, které do sebe nejsou ani jedním směrem zanořené (první obsahuje a_i a druhá ne, protože jinak bychom mohli a_i vynechat z naší množiny generátorů, což je spor s minimalitou; pro opačné zanoření analogicky), takže jsou izomorfní, tj. speciálně stejně velké. Kdyby pro spor bylo $n \geq 3$, pak (opět, z minimality $\{a_1, \ldots, a_n\}$) dostáváme izomorfnost (a_1, a_2) a (a_3). Ale první z těchto grup obsahuje celou (a_1) a k tomu ještě a_2, čili má více prvků než (a_3), tedy nemůže být izomorfní. Takže $n \leq 2$, což jsme přesně chtěli.

4. Ano. Prostor pokryjí například přímky p_{ab} dané body $(a, b, 0)$ a směrovými vektory $(-b, a, 1)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Nic nevynechají: Pro $x, y, z \in \mathbb{R}$ vyjde

$$(x, y, z) = (a, b, 0) + z(-b, a, 1) = (\tfrac{x+yz}{1+z^2}, \tfrac{y-xz}{1+z^2}, 0) + z(-\tfrac{y-xz}{1+z^2}, \tfrac{x+yz}{1+z^2}, 1).$$

Mimoběžnost: Pokud $(a, b) \neq (c, d)$, pak rovina daná bodem $(a, b, 0)$ a (různými) směrovými vektory $(-b, a, 1)$ a $(-d, c, 1)$ nebude obsahovat bod $(c, d, 0)$. Rovinu $z = 0$ totiž protne přímkou se směrem $(d-b, a-c, 0)$, ten je dokonce kolmý na potřebný směr $(c, d, 0) - (a, b, 0)$.