4. soutěžní série – řešení

1. Dosadíme za z postupně z a iz a obě rovnice sečteme: $f(z)f(iz)+f(iz)f(-z)=z^2-z^2$. Tedy $(f(z)+f(-z))f(iz)=0$. Ale pro $z\neq 0$ máme $f(z)f(iz)=z^2\neq 0$, tedy $f(iz)\neq 0$. Tj. $f(z)+f(-z)=0$ pro $z\neq 0$. Pro $z=0$ také, protože $f(0)f(0i)=0^2$.

2. Zvolme si systém souřadnic tak, aby těžiště $A_1,\dots,A_n$ bylo v počátku O. Jejich souřadnice $A_i=[x_i,y_i]$ pak budou splňovat $\sum_{i=1}^n x_i=\sum_{i=1}^n y_i=0$. Zkoumaná suma bude pro bod $P=[x,y]$ rovna

$$\sum_{i=1}^n |A_iP|^2=\sum_{i=1}^n[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]=n(x^2+y^2)-2(x+y)\cdot 0+\sum_{i=1}^n(x_i^2+y_i^2),$$

tedy $n|OP|^2=s-\sum_{i=1}^n|OA_i|^2$. Odtud snadno vidíme, že všechny body budou ležet na kružnici se středem O a poloměrem $\sqrt{\frac{1}{n}(s-\sum_{i=1}^n|OA_i|^2)}$, respektive pokud máme pod odmocninou nulu, řešením je O, a pro záporný rozdíl žádný bod P neexistuje.

3. Pro sudé n je 2^n-1 liché a tedy není násobkem n. Nechť n je liché a nechť $p\geq 3$ je jeho nejmenší prvočinitel. Ukážeme, že $p\nmid 2^n-1$. Dle malé Fermatovy věty $p|2^{p-1}-1$. Označme $q<p$ největší dělitel $p-1$ splňující $p|2^q-1$. Pak určitě q nedělí n (p je nejmenší číslo větší než 1, které dělí n), pišme $n=qs+r$, kde $1\leq r<q$. Odtud dostaneme $2^n=(2^q)^s2^r\equiv 2^r\not\equiv 1\pmod{p}$.

Jiné řešení: Pro liché n a $p\geq 3$ jeho nejmenší prvočinitel máme $2^n\equiv 1\equiv 2^{p-1}\pmod{p}$ dle předpokladu a malé Fermatovy věty. Zároveň z volby p plyne $\mathrm{NSD}(n,p-1)=1$. Proto Eukleidovým algoritmem také vyplyne $2^{\mathrm{NSD}(n,p-1)}=2^1\equiv 1\pmod{p}$, spor.

4. Platí $1+3+\dots+(2n+1)=(n+1)^2$ a $1\cdot 3\dots(2n+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$. Položme $a_n=\frac{(2n+1)!}{2^n n!(n+1)^n}$. Pak

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}(n+1)!(n+2)^{n+1}}\frac{2^n n!(n+1)^n}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\frac{(2n+3)(2n+2)(n+1)^n}{(n+1)(n+2)^{n+1}}=$$

$$=\frac{(2n+3)(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}}=\frac{(2n+3)(n+2)}{(n+1)^2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(n+2)}{(n+1)^2}=2\quad\text{a}\quad\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}=e^{-1}.$$

Tedy $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\frac{2}{e}$. Nechť $\ell=\frac{2}{e}$. Pro každé $\varepsilon>0$ existuje n_0, že pro $n\geq n_0$ je $\ell-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<\ell+\varepsilon$, tedy pro $n>n_0$ je $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}a_{n_0}\in((\ell-\varepsilon)^n a_0,(\ell+\varepsilon)^n a_0)$. Tedy $\sqrt[n]{a_n}\to\ell$. Protože nás zajímá $\sqrt[n]{a_n^2}$, je hledanou limitou $\ell^2=\frac{4}{e^2}$.

Jiné řešení: Stirlingova formule $\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}}{n!}=1$ pro $1\cdot 3\dots(2n+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$, součet $1+3+\dots+(2n+1)=(n+1)^2$ a limitní srovnávací kritérium umožní limitu L zjednodušit a přímo spočítat

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{2n+1}{e})^{4+\frac{2}{n}}(2\pi(2n+1))^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{2n}{n}}(\frac{n}{e})^2(2\pi n)^{\frac{1}{n}}(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4e^{-4}}{4n^2e^{-2}(n+1)^2}=\frac{4}{e^2}.$$