5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 6. 12. 2021.

Úloha 1. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že rovnice $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ má (komplexní) kořen splňující $|z| = 1$, právě když $6 \mid n + 2$.

Úloha 2. Množina $E \subset \mathbb{R}$ má vlastnost, že pro každé $x, y \in E$ platí $\frac{x+y}{2} \in E$. Víme, že $[0, 1] \subset E$ a $2021 \in E$. Zjistěte, jestli nutně $[500, 600] \subset E$.

Úloha 3. Nechť $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce taková, že $f(0)f(1) < 0$. Ukažte, že v intervalu $(0, 1)$ umíme najít dvě různá čísla α a β taková, že $f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha)f(\beta)$.

Úloha 4. Nechť A, B jsou komplexní $n \times n$ matice, jejichž hodnosti jsou stejné. Pokud $A^2B = A$, pak $B^2A = B$. Dokažte.

Úloha 5. Buď S konečná množina. Systém P alespoň dvou podmnožin S nazveme *rozklad*, jestliže jsou množiny z P neprázdné, po dvou disjunktní a jejich sjednocení je S. Rozklady $P_1, \dots, P_n$ nazveme *nezávislé*, jestli pro libovolnou volbu po jedné množině z každého rozkladu je průnik vybraných množin neprázdný. Posloupnost $P_1, \dots, P_n$ nezávislých rozkladů nazveme *maximální*, pokud po přidání libovolného rozkladu P už rozklady $P, P_1, \dots, P_n$ nejsou nezávislé.

Ukažte, že pokud nezávislé rozklady $P_1, \dots, P_n$ splňují

$$\frac{|S|}{2} < |P_1| \dots |P_n|,$$

pak je posloupnost $P_1, \dots, P_n$ maximální. Dále ukažte, že tato nerovnost není nutná pro maximalitu.

⋆ **Úloha 6.** Nechť G je konečná abelovská grupa a $f : \mathbb{N} \to G$ splňuje pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ vztah $f(m)f(n) = f(mn)$. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$ takových, že $f(k) = f(k + 1)$