

5. soutěžní série

29. 11. 2021

Úloha 1. Buďte a_i, b_i, c_i přirozená čísla pro $i = 1, \dots, n$. Nechtě je pro každé i alespoň jedno z čísel a_i, b_i, c_i liché. Ukažte, že existují přirozená k, ℓ, m taková, že $ka_i + \ell b_i + mc_i$ je liché alespoň pro $\frac{4n}{7}$ různých i .
(5 bodů)

Úloha 2. Je dán lichoběžník $ABCD$, ve kterém $AB \parallel CD$ a ve kterém platí $(|AB| + |CD|)^2 = |AC|^2 + |BD|^2$. Dokažte, že úhlopříčky AC a BD jsou navzájem kolmé.
(10 bodů)

Úloha 3. Nechtě $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ je klesající funkce splňující $\int_0^\infty f(x) dx < \infty$. Dokažte $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0$.
(10 bodů)

Úloha 4. Nechtě p je prvočíslo. Ukažte, že ve čtvercové síti o rozměrech $p \times p$ vrcholů lze vybrat p vrcholů tak, že žádné tři neleží na přímce.
(15 bodů)