6. soutěžní série

13. 12. 2021

Úloha 1. Petr rozdělí 9 kamenů do několika hromádek. Poté Pavel rozdělí týchž devět kamenů do několika hromádek. Dokažte, že existují dva kameny, které byly ve stejně velkých hromádkách při Petrově rozdělení a poté ve stejně velkých hromádkách při Pavlově rozdělení.
(5 bodů)

Úloha 2. Rozhodněte, zda lze pro libovolné přirozené n a libovolná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ napsat $\prod_{k=1}^{n}(a_k^2 - b_k^2)$ jako rozdíl dvou druhých mocnin. (10 bodů)

Úloha 3. Na množině G je definována operace $\circ$, která splňuje $a \circ a = a$ a $(a \circ b) \circ c = (b \circ c) \circ a$ pro všechny trojice $a, b, c \in G$. Ukažte, že $\circ$ je asociativní a komutativní. (10 bodů)

Úloha 4. Existuje pro každou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že $f = g \circ g$? (15 bodů)