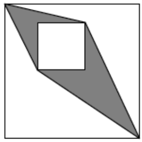
1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 10. 10. 2022.

Úloha 1. Jaká může být plocha šedé oblasti, má-li větší čtverec stranu dlouhou 7 cm a menší 2cm a strany obou čtverců jsou navzájem rovnoběžné?



Úloha 2. Obdélník 7×1 chceme pokrýt dílky, z nichž každý má velikost $m\times 1$ ($m = 1, 2, \ldots, 7$) a jednu ze tří barev (modrá, zelená, červená). Od každého typu dílku máme dostatek exemplářů. Určete počet takových pokrytí, v nichž se použijí všechny tři barvy. (Nahradíme-li modrý 2×1 dílek dvěma modrými 1×1 dílky, získáme jiné pokrytí.)

Úloha 3. Označme $R(n)$ součet zbytků čísla n po vydělení čísly 2, 3, $\ldots$, 10. Např. $R(15) = 1 + 0 + 3 + 0 + 3 + 1 + 7 + 6 + 5 = 26$. Najděte všechna dvojciferná čísla n splňující $R(n) = R(n + 1)$.

Úloha 4. Nalezněte všechny $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které mají spojitou druhou derivaci a splňují $f(t)^2 = f(\sqrt{2}t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Úloha 5. Nalezněte všechny čtvercové matice A řádu n s celočíselnými prvky takové, že pro každou čtvercovou matici B řádu n s celočíselnými prvky je $\det(A - B) + \det(B)$ sudé číslo.

Úloha 6. Nechť (X, d) je metrický prostor a $f : X \to X$ zobrazení takové, že pro každé $x, y \in X$ je $d(x, y) = d(f(x), f(y))$. Nechť $x \in X$ je libovolný bod. Definujeme posloupnost $x_0, x_1, \ldots$ jako $x_0 = x$ a $x_{n+1} = f(x_n)$. Ukažte, že existuje limita $\lim_{n\to\infty} \frac{d(x,x_n)}{n}$ a že její hodnota nezávisí na volbě x.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`