3. soutěžní série – řešení

1. Přímka, která protíná kolmo graf funkce $\sinh x$ v bodě $(a, \sinh a)$ má směrový vektor $(\cosh a, -1)$, tj. je to množina bodů $(a, \sinh a) + t(\cosh a, -1)$. Kolmice ke grafu $\cosh x$ má tvar $(b, \cosh b) + s(\sinh b, -1)$. Aby přímky byly totožné, musí být $\cosh a = \sinh b$ a $(a, \sinh a) = (b, \cosh b) + r(\cosh a, -1)$. Protože sinh je rostoucí funkce menší než cosh, plyne z rovnosti $\cosh a = \sinh b$ nerovnost $b > a$. Odtud $0 < b - a = -r \cosh a$, tj. $r < 0$. Na druhou stranu, $b > a$ implikuje $0 < \cosh b - \sinh a = r$. To je spor, taková přímka tedy neexistuje.

2. Množina S musí obsahovat jedničku: buď $1 = 1 \cdot 1$ nebo $1 = (-1)(-1)$. Musí obsahovat kladná čísla tvaru $\frac{1}{q}$: postupným sčítáním $-\frac{1}{q}$ bychom jinak získali -1. Postupným sčítáním $\frac{1}{q}$ navíc získáme $\frac{p}{q}$. Množina tedy obsahuje všechna kladná racionální čísla. Množiny $\mathbb{Q}^+$ a $\mathbb{Q}_0^+$ (kladná a nezáporná racionální čísla) vyhovují.

3. Označme $d(N)$ počet kladných dělitelů čísla N. Pak $d(N) \leq 2\sqrt{N}$, protože polovina dělitelů musí být menší nebo rovna $\sqrt{N}$. Tedy $N \geq \frac{1}{4} d(N)^2$. Číslo b_n má aspoň n různých dělitelů, čísla $a_1, \ldots, a_n$. Odtud $b_n \geq \frac{1}{4} d(b_n)^2 \geq \frac{1}{4} n^2$. Protože $\sum \frac{4}{n^2}$ konverguje a $0 \leq \frac{1}{b\,n} \leq \frac{4}{n^2}$, konverguje i řada $\sum \frac{1}{b_n}$.

4. Představme si, že přidáme nulté místo a že parkovací místa leží na kružnici. Pro názornost si čísla $a_2, \ldots, a_n$ nahraďme rozdíly $b_i = a_i - a_{i-1}$ modulo $n+1$. Čísla $b_2, \ldots, b_n$ jednoznačně určí pořadí aut a číslo a_1 pouze cyklicky posouvá toto rozmístění. Obsadí se všechna místa kromě nultého, takže si není třeba zaznamenávat hodnotu a_1 a ke každé $(n-1)$-tici $(b_2, \ldots, b_n)$ existuje právě jedna vyhovující n-tice $a_1, \ldots, a_n$. Na druhou stranu předpis $b_i = a_i - a_{i-1}$ z každé vyhovující n-tice $(a_1, \ldots, a_n)$ jednoznačně vytvoří $(n-1)$-tici $(b_2, \ldots, b_n)$. Počet možností je $(n+1)^{n-1}$.