

3. soutěžní série

31. 10. 2022

Úloha 1. Existuje přímka v rovině, která protíná kolmo grafy obou funkcí $\sinh x$ a $\cosh x$? (10 bodů)

Úloha 2. Najděte všechny množiny S racionálních čísel takové, že S je uzavřená na sčítání a na násobení a pro každé $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ je právě jedno z čísel x , $-x$ prvkem S . (10 bodů)

Úloha 3. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel a pro každé n označme b_n nejmenší společný násobek čísel a_1, \dots, a_n . Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ konverguje. (10 bodů)

Úloha 4. Podél jednosměrné silnice je n parkovacích míst. Postupně jí projíždí n řidičů, přičemž k -tý řidič ($k = 1, \dots, n$) má oblíbené místo a_k . Každý řidič přijede ke svému oblíbenému místu a pokud je volné, zaparkuje v něm. Jinak pokračuje, zaparkuje na nejbližším volném místě a pokud by už žádné nenásledovalo, odjede pryč. Pro kolik n -tic (a_1, \dots, a_n) se obsadí všechna místa? (10 bodů)