6. soutěžní série – řešení

1. Nechť je relativní rychlost dvojice běžkařů kladná, pokud se k sobě přibližují, a záporná, pokud se od sebe vzdalují. Každá relativní rychlost může být nějaký čas konstantní kladná, pak změní znaménko a už zůstane konstantní záporná. Označme $V_i(t)$ součet relativních rychlostí i-tého běžkaře od všech ostatních, bude to po částech konstatní nerostoucí funkce. Pak součet relativních rychlostí přes všechny dvojice běžkařů je roven $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i(t)$ a je-li kladný, musí být aspoň jeden sčítanec na konci časového úseku kladný. Tedy vždy existuje běžkař splňující podmínku ze zadání.

2. Protože z prvních dvou úloh je možno získat $8^2 = 64$ různých ohodnocení a žádní dva lidé nemají tato skóre stejná, mohlo v soutěži být nanejvýš 64 soutěžících.

Zároveň pokud pro všechna $a, b \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ vezmeme skórování a bodů za první úlohu, b bodů za druhou a $a + b \pmod 8$ bodů za třetí, pak žádné dvě tyto skórování se neshodují na dvou pozicích, protože libovolné dvě čísla jednoznačně určují to třetí.

3. Indukcí ukážeme, že $a_{4k} = a_{4k+1} = 1$, $a_{4k+2} = \left\lfloor \frac{4k+2}{3} \right\rfloor$ a $a_{4k+3} = 3$ pro každé k. Pro $k \leq 2$ se to spočítá. Nyní můžeme pro $k \geq 3$ předpokládat, že $a_{4k-4} = a_{4k-3} = 1$, $a_{4k-2} = \left\lfloor \frac{4k-2}{3} \right\rfloor$ a $a_{4k-1} = 3$. Platí $\left\lfloor \frac{4k-2}{3} \right\rfloor \leq \frac{4k-2}{3} \leq \frac{4k}{3}$ a zároveň díky $\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \geq \frac{a-2}{3}$ je $2\left\lfloor \frac{4k-2}{3} \right\rfloor \geq 2\frac{4k-4}{3} \geq \frac{4k+1}{3}$, protože $4k \geq 9$. Takže

$$1 < \frac{4k}{3 \cdot \left\lfloor \frac{4k-2}{3} \right\rfloor} < \frac{4k+1}{3 \cdot \left\lfloor \frac{4k-2}{3} \right\rfloor} < 2,$$

z čehož díky indukčnímu předpokladu dostaneme $a_{4k} = 1$ a $a_{4k+1} = 1$. Nyní zjevně $a_{4k+2} = \left\lfloor \frac{4k+2}{3} \right\rfloor$. Nakonec díky $4k > 9$ je $3\left\lfloor \frac{4k+2}{3} \right\rfloor \leq 4k + 3 < 4 \cdot \frac{4k}{3} \leq 4\left\lfloor \frac{4k+2}{3} \right\rfloor$, takže

$$3 \leq \frac{4k+3}{\left\lfloor \frac{4k+2}{3} \right\rfloor} < 4,$$

čili $a_{4k+3} = 3$.

Z toho dostáváme, že a_n je dobře definovaná posloupnost a protože $4 \mid 2022 - 2$, je $a_{2022} = \left\lfloor \frac{2022}{3} \right\rfloor = 674$.

4. Matice A je singulární, takže nějaký sloupec je lineární kombinací těch ostatních. $\det(A_1) = 2022 \neq 0$ speciálně znamená, že posledních $n-1$ sloupců je lineárně nezávislých. Proto můžeme psát $a_1 = \sum_{k=2}^{n} c_k a_k$, kde a_k je k-tý sloupec matice A a c_k jsou racionální koeficienty ($\mathbb{Q}$ je nejmenší těleso obsahující $\mathbb{Z}$). Matici A_i získáme z A_1 pomocí úprav: i-tý sloupec vynásobíme c_i, přičteme c_k-násobky sloupců $k = 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, to samé zopakujeme pro i-tý řádek, přesuneme i-tý sloupec na levý kraj matice, přesuneme i-tý řádek na horní kraj matice. Tím se determinant přenásobí postupně c_i, 1, c_i, 1, $(-1)^{i-2}$, $(-1)^{i-2}$. Hledaný determinant $\det(A_i) = 2022c_i^2$ je součet součinů celých čísel, tedy je také celý, $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ je square-free, a proto c_i musí být celé.