7. soutěžní série – řešení

1. Protože $f'' \geq 0$, je funkce f' je neklesající. Pro pevné $x \in \mathbb{R}$ nastane jedna ze tří možností: 1. $f'(x) = 0$, pak $f(x + f'(x)) = f(x)$. 2. $f'(x) > 0$, pak na celém intervalu $(x, x + f'(x))$ je $f' > 0$, tj. f je tam rostoucí a $f(x + f'(x)) > f(x)$. 3. $f'(x) < 0$, pak na celém intervalu $(x+f'(x), x)$ je $f' < 0$, tj. f je tam klesající, a tedy opět $f(x+f'(x)) > f(x)$.

2. Platí

$$0 \leq \left\| \sum_{i=0}^{n} v_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} v_i, \sum_{i=0}^{n} v_i \right) = \sum_{i=0}^{n} v_i^2 + \sum_{0 \leq i,j \leq n, i \neq j} (v_i, v_j) = n + 1 + \sum_{0 \leq i,j \leq n, i \neq j} (v_i, v_j),$$

tj.

$$\sum_{0 \leq i,j \leq n, i \neq j} (v_i, v_j) \geq -(n+1).$$

Poslední suma obsahuje $n(n+1)$ sčítanců, kdyby byly všechny menší než $-\frac{1}{n}$, byl by jejich součet menší než $-(n+1)$, což je spor.

Poznámka: Rovnost nastane právě, když součet všech vektorů je nulový a všechny dvojice navzájem svírají stejný úhel. Takové vektory lze sestrojit indukcí. Pro $n = 1$ volíme (-1), (1). Pokud pro $n-1$ máme vektory $v'_0, \ldots, v'_{n-1}$, pak nové vektory budou $(\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}} v'_0, -\frac{1}{n}), \ldots, (\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}} v'_{n-1}, -\frac{1}{n}), (0, \ldots, 0, 1)$.

3. Označme uvažované přirozené číslo jako n. Pokud n je sudé, zvolíme $a = 2n$ a $b = n$ - protože n je sudé, nepřibyde vynásobením dvěma žádný nový prvočíselný dělitel. Pokud n je liché, najdeme p nejmenší liché prvočíslo, které nedělí n. Pak zvolíme $a = pn$ a $b = (p-1)n$. Protože p nedělí n, má a o jednoho prvočíselného dělitele (konkrétně p) více, než n. Protože $p-1$ je sudé a všechny jeho liché prvočíselné dělitele musí dělit n, má b z lichosti n o jednoho prvočíselného dělitele (konkrétně dvojku) více, než n. Tedy a a b mají stejný počet prvočíselných dělitelů.

4. Uvažujme orientovaný graf, jehož vrcholy jsou všechny $(n-1)$-tice písmen a vrcholy v_1, v_2 propojíme hranou, pokud se posledních $n-2$ písmen v_1 shoduje s prvními $n-2$ písmeny v_2. Graf má 2^n hran odpovídajících všem n-ticím písmen, je souvislý, do každého vrcholu vedou 2 hrany a vychází z něj také 2 hrany. V takovém grafu (souvislý, sudé vstupní i výstupní stupně vrcholů) existuje eulerovský tah, tedy posloupnost hran procházející všemi hranami právě jednou. Vrcholy 2^n-úhelníka uznačíme podle tohoto tahu.