# 2. soutěžní série – řešení

**1.** Jediná řešení jsou $(1,2)$ a $(2,1)$. Jsou-li $x, y \geq 2$, pak je LS lichá a PS sudá, spor. Pokud $x = 1$, pak máme rovnici $2(1 + y!) = (1 + y)!$. Pro $y \geq 3$ je PS dělitelná třemi a LS nikoli. $y = 2$ dává řešení, $y = 0, 1$ nikoli. Případ $x = 0$ dává $2(1 + y!) = y!$, kde je LS evidentně větší.

**2.** Nerovnost je ekvivalentní s $(ab)^{\frac{1}{b}} \geq (ax)^{\frac{1}{x}}$. Chceme ukázat, že funkce $(ax)^{\frac{1}{x}} = \exp(\frac{\log(ax)}{x}) = \exp(f(x))$ má jediné maximum. Derivace $f'(x) = \frac{1-\log(ax)}{x^2}$ je kladná na $(0, \frac{e}{a})$ a záporná na $(\frac{e}{a}, \infty)$. Jedinou hodnotou splňující danou nerovnost je $b = \frac{e}{a}$.

**3.** Jde to. Nad intervaly $[1,2]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$, … osy $x$ v rovině vztyčíme po řadě čtverce o stranách $1$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, …. Čtverec o straně $\frac{1}{2^n}$ pak rozdělíme na $2^{3+n} \times 2^{3+n}$ čtverečků o straně $\frac{1}{2^{3+2n}}$ a do jednotlivých čtverečků umístíme kruhy o poloměrech

$$\frac{1}{2^{4+2n}}, \frac{1}{2^{4+2n}+1}, \ldots, \frac{1}{2^{4+2n} + 3 \cdot 2^{4+2n} - 1} = \frac{1}{2^{4+2(n+1)} - 1}.$$

Každý z těchto kruhů se evidentně vejde do jednoho čtverečku, počet kruhů je $3 \cdot 2^{4+2n} < 4 \cdot 2^{4+2n} = 2^{3+n} \cdot 2^{3+n}$, tj. menší než počet čtverečků. Uvažujeme-li postupně $n = 0, 1, 2, \ldots$, umístíme takto všechny kruhy s poloměry menšími nebo rovnými $\frac{1}{16}$. Největších 15 kruhů umístíme někam daleko. Posloupnost středů evidentně konverguje k počátku, protože od jistého indexu už leží ve čtverci $[0, 2^{-n}] \times [0, 2^{-n}]$.

**4.** Označme $\deg(p) = n$, $\deg(q) = m$, bez újmy na obecnosti $n \geq m$. Kořeny $p$ označme $x_1, \ldots, x_s$, jejich násobnosti $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. Kořeny $(p+1)$ označme $y_1, \ldots, y_t$, jejich násobnosti $\beta_1, \ldots, \beta_s$. Tyto kořeny jsou navzájem různé ($(p+1)(x_i) = 1 \neq 0$). Polynom $p - q = (p+1) - (q+1)$ má stupeň nejvýše $n$ a musí mít alespoň $s + t$ kořenů $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t$. Polynom $p' = (p+1)'$ stupně $n - 1$ musí mít kořeny $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t$ s násobnostmi $\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_s - 1, \beta_1 - 1, \ldots, \beta_s - 1$ (jednonásobné kořeny $p$ nebo $p + 1$ nebudou kořeny derivace). Tedy $n - 1 \geq (\alpha_1 - 1) + \ldots (\alpha_s - 1) + (\beta_1 - 1) + \ldots (\beta_s - 1) = 2n - s - t$, $s + t \geq n + 1$. Polynom $p - q$ stupně nejvýše $n$ má alespoň $s + t \geq n + 1$ kořenů, proto se jedná o nulový polynom, tj. $p = q$.