1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 14.10.2024

Úloha 1. Uvažujme trojúhelník ABC a druhý trojúhelník XYZ, jehož strany mají stejné délky jako těžnice trojúhelníku ABC. Dokažte, že $[XYZ] = \frac{3}{4}[ABC]$, kde $[T]$ značí obsah útvaru T.

Úloha 2. Pro kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}.$$

Dokažte.

Úloha 3. Dokažte, že každé přirozené číslo menší nebo rovno $n!$ lze napsat jako součet nejvýše n různých dělitelů čísla $n!$.

Úloha 4. Je dána posloupnost 19 kladných celých čísel nepřesahujících 93 a posloupnost 93 kladných celých čísel nepřesahujících 19. Ukažte, že lze z každé posloupnosti vybrat neprázdný souvislý úsek tak, že součty čísel v obou vybraných úsecích budou stejné.

Úloha 5. Určete nejmenší hodnotu $\int_0^1 (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x$ přes všechny spojitě diferencovatelné funkce $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ splňující $\int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 f(x) \,\mathrm{d}x = 1$.

Úloha 6. Buď n kladné celé číslo a nechť A a B jsou reálné symetrické matice $n \times n$ s nezápornými vlastními čísly. Dokažte, že $A^5 + B^5 = (A+B)^5$, právě když $AB = 0$.

1st home series

Solutions will be presented at the seminar on October 14, 2024.

Problem 1. Consider a triangle ABC and a second triangle XYZ with side lengths equal to lengths of medians of triangle ABC. Prove that $[XYZ] = \frac{3}{4}[ABC]$ where $[T]$ denotes the area of T.

Problem 2. If a, b, c are positive real numbers, then

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}.$$

Prove.

Problem 3. Prove that every positive integer less or equal to $n!$ can be written as sum of n distinct divisors of $n!$.

Problem 4. Given a sequence of 19 positive (not necessarily distinct) integers not greater than 93, and a set of 93 positive (not necessarily distinct) integers not greater than 19. Show that we can find a non-empty segment in each sequence such that the two segments have equal sums.

Problem 5. What is the minimum value of $\int_0^1 (f'(x))^2 \, \mathrm{d}x$ over all continuously differentiable functions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ such that $\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 f(x) \, \mathrm{d}x = 1$?

Problem 6. Let n be a positive integer, and let A and B denote $n \times n$ real symmetric matrices with nonnegative eigenvalues. Prove that $A^5 + B^5 = (A+B)^5$ if and only if $AB = 0$.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`